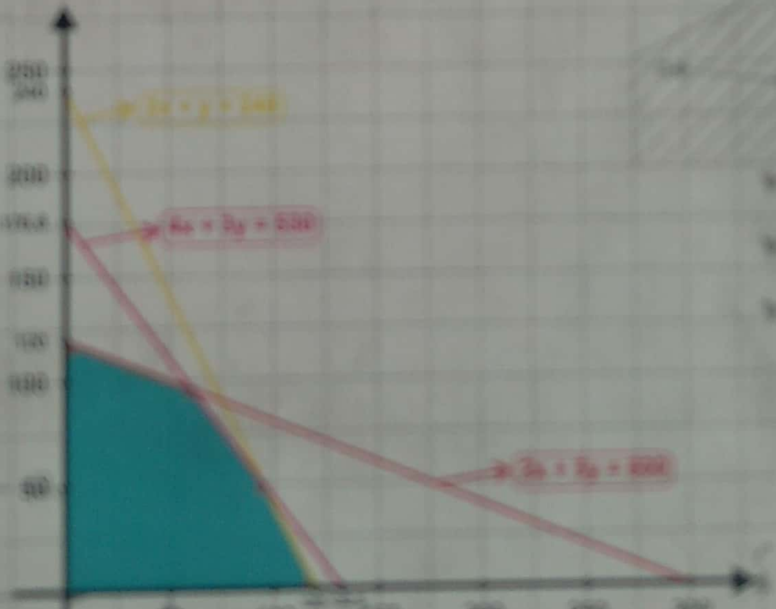
Seri Pembelajaran

PROGRAM LINIER



Dr. Zulyadaini, M.Pd

SERI PEMBELAJARAN

PROGRAM LINIER.

Dr. Zulyadaini, M.Pd.

TANGGA ILMU
Sumber Pengetahuan

SERI PEMBELAJARAN

PROGRAM LINIER.

Cetakan I Maret 2017. vii +274. ; 14,5 cm X 21 cm

ISBN : 978-602-98052-7-7

Penulis :

Dr. Zulyadaini, M.Pd.

Editor:

Dr. Buyung, M.Pd

Lay Out :

Ahmad

Design:

@Hatori

Penerbit :

Tangga Ilmu.

Krapyak Kulon RT 03. 100, Panggungharjo Sewon Bantul
Yogyakarta

Email : ahmadthohari@ymail.com

Telp : 0852-7441-8584, WA : 0858-0345-2695

SERI PEMBELAJARAN

PROGRAM LINIER.

Cetakan I Maret 2016. vii +271. ; 14,5 cm X 21 cm

Penulis :

Dr. Zulyadaini, M.Pd.

Editor:

Dr. Buyung, M.Pd

Lay Out :

Ahmad

Design:

@Hatori

Penerbit :

Tangga Ilmu.

Krapyak Kulon RT 03. 100, Panggungharjo Sewon Bantul Yogyakarta

Email : ahmadthohari@ymail.com

Telp : 0852-7441-8584, WA : 0858-0345-2695

Sanksi Pelanggaran Pasal 72 UU RI No. 19 Tahun 2002 tentang pelanggaran Hak Cipta

(1) Barang siapa dengan sengaja dan tanpa hakmengumumkan atau memperbanyak suatu ciptaan atau memberi izin untuk itu, dapat dipidana dengan pidana penjarapaling sedikit Rp 1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau dipidana Penjara paling lama 7 (tujuh tahun dan/atau dendapalingbanyak Rp 5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

(2) Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta atau hak terkait, dapat dipidana dengan penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp5.000.000.000,00(lima ratus juta rupiah).

KATA PENGANTAR

Syukur Alhamdulillah, segala kesempurnaan hanya milik Allah SWT semata, atas Berkat dan RahmatNya, setelah melalui proses yang panjang, ahkhirnya buku *Program Linier* ini dapat diterbitkan.

Buku ini disusun dengan maksud memberikan pemahaman yang lebih mendalam kepada mahasiswa berkenaan dengan konsep dasar Program Linier dan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari. Selain itu buku ini juga dapat menjadi salah satu sumber belajar pada Mata Kuliah Program Linier Program Studi Pendidikan Matematika di Perguruan Tinggi. Sebuah karya sulit dikatakan sebagai usaha satu orang saja atau tanpa bantuan orang lain, demikian pula proses penulisan buku ini, untuk itu dengan kerendahan hati penulis menghaturkan terima kasih setinggi-tingginya kepada:

1. H. Fachruddin Razi, SH, MH., Rektor Universitas Batanghari Jambi, orang tua yang penyayang, sangat peduli dan penuh inspirasi yang senantiasa memberikan motivasi, fasilitas hingga buku ini dapat diterbitkan.

2. Ifan Sadewa, S.Kom, M.S.I., Instruktur pada Laboratorium Komputer Universitas Batanghari, sahabat karib yang banyak memberikan masukan berharga dalam penyusunan buku ini.
3. Herawati, S.Pd.I., istri tercinta yang dengan sabar dan selalu memberikan semangat sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ini.

Akhirnya, penulis menyadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna, "tiada gading yang tak retak". Semua kritik dan saran mengenai buku ini akan diterima dengan senang hari.

Jambi, Maret 2017

Penulis:

Dr. Zulyadaini, M.Pd
e-mail: erayaden@yahoo.com;
g-mail; zulyadaini2012@gmail.com

Editor:

Dr. Buyung, M.Pd
e-mail: buyungplaho@ymail.com;
g-mail; buyungplaho@gmail.com

DAFTAR ISI

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari sering kali kita menjumpai masalah yang dalam penyelesaiannya kita menghendaki hasil yang optimum padahal sumber daya yang kita punyai untuk mencapai hasil tersebut terbatas. Kumpulan cara atau metode untuk memecahkan masalah tersebut di atas dikenal dengan Riset Operasional. Sebutan ini dikenal sejak selesainya perang dunia II (akhir tahun 1950-an). Sebenarnya masalah serupa serta metode penyelesaiannya sudah diketengahkan sejak lama. Namun, perkembangannya kurang begitu pesat, belum banyak ahli yang berkecimpung dalam penyelesaian masalah tersebut maupun belum banyak hasil temuan metode yang dipublikasikan. Akan tetapi, sejak adanya perang dunia kedua, dengan dipicu oleh keinginan pihak sekutu untuk mengakhiri perang secepatnya, para ahli strategi militer maupun ilmuwan banyak mencurahkan diri untuk mencari perencanaan strategi operasi militer yang diharapkan dapat menyelesaikan perang secepatnya. Masalah yang dihadapi sebenarnya serupa dengan masalah di atas, yaitu berangkat dari keterbatasan sumber daya (personil, biaya, peralatan), diharapkan diperoleh hasil yang optimum. Hasil yang optimum tersebut berhubungan dengan biaya, waktu maupun risiko yang minimum ataupun berhubungan dengan keuntungan, manfaat yang maksimum.

Setelah selesainya perang dunia kedua, kumpulan metode yang telah ditemukan beralih diterapkan pada masalah yang berhubungan dunia industri sejalan dengan beralihnya kebutuhan yang dihadapi. Mulai saat itulah terjadi perkembangan pesat baik ragam masalah maupun metode penyelesaiannya. Untuk selanjutnya kumpulan metode penyelesaiannya tersebut disebut orang dengan Riset Operasional, sesuai dengan awal banyak digunakannya metode tersebut untuk keperluan operasi militer. Sejak saat itu bidang kajian masalah maupun metode penyelesaian masalahnya berkembang menjadi suatu disiplin keilmuan (bidang kajian) tersendiri. Dari uraian tersebut di atas, kita dapat menyatakan secara lebih umum bahwa disiplin keilmuan Riset Operasional berawal dari upaya untuk memecahkan masalah.

Dengan mempertimbangkan keterbatasan sumber daya yang ada, bagaimana kita dapat melakukan tugas yang diberikan agar diperoleh hasil yang optimum? Sebelum tugas yang diberikan dilaksanakan, dilakukan dahulu riset (atau penelitian) untuk memperoleh rancangan. Diharapkan rancangan yang diperoleh dapat dioperasionalkan (dapat dilaksanakan) dan dapat memberikan hasil yang optimum dengan mempertimbangkan keterbatasan yang ada. Kumpulan metode atau teknik yang digunakan untuk menghasilkan rancangan tersebut disebut selanjutnya dengan Riset Operasional.

BAB I

PERUMUSAN MASALAH PROGRAM LINEAR

A. PENDAHULUAN PEMROGRAMAN LINEAR

Program linear, kata benda dari pemrograman linear (*linear programming*), muncul dalam bidang penelitian operasional (*operational research*), telah terbukti sebagai cara yang paling tepat untuk penyelesaian masalah tertentu. Ide ini pertama kali dikembangkan dalam bidang kemelitiran selama Perang Dunia Kedua, kemudian dikembangkan di dalam bidang pemerintahan, manajemen, komersial dan perdangangan, aplikasi dalam bidang industri, dan lainnya.

Persoalan pokok yang dihadapi adalah sejauh mana masalah itu diterjemahkan ke dalam model matematika sehingga dapat dianalisis dengan lebih seksama. Tentu saja upaya menerjemahkan masalah ke dalam model matematika tidak terlepas dari hakikat program linear sebagai suatu teknik perencanaan yang bersifat analisis memakai model matematika.

Pemrograman linear adalah teknik matematika untuk memilih program terbaik dari sehimpunan alternatif yang mungkin dengan menggunakan fungsi linear. Masalah pemrograman linear adalah mengoptimalkan (memaksimumkan/meminimumkan) variabel terikat (fungsi linear dari variabel bebas) terhadap sejumlah kendala linear.

Variabel terikat adalah fungsi tujuan melibatkan konsep ekonomi seperti keuntungan, biaya, pemasukan, penjualan, jarak, waktu, dll. Variabel bebas adalah variabel keputusan, dalam menyelesaikan masalah pemrograman linear, nilai dari variabel ini yang akan diputuskan. Solusi optimal dari pemrograman linear adalah memasukkan sehimpunan nilai ke variabel keputusan (tidak harus unik) dan ke fungsi tujuan yang bersesuaian.

Bentuk umum pemprograman linear :

Rumusan umum bentuk baku suatu program linear dapat dinyatakan sebagai berikut. Carilah nilai x_1, x_2…., x_n yang dapat menghasilkan berbagai kombinasi optimum

Fungsi Tujuan

(maksimum atau minimum) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots. + c_nx_n$

Pembatas

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n \leq$ atau $\geq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq$ atau $\geq b_2$

… … …

$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \leq$ atau $\geq b_k$

… … …

$a_{m1}x_2 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq$ atau $\geq b_m$

Syarat variabel $x_j \geq 0$ untuk $j = 1,2, \ldots, n$

Dimana :

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ = variabel keputusan

f = fungsi tujuan

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ = koefisien dari variabel keputusan pada fungsi tujuan

$a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ = koefisien variabel keputusan pada kendala ke-i

b_i = konstanta (bagian kanan) dari kendala ke-i

Penyelesaian program linear dapat menggunakan Dengan notasi sigma Maka:

Fungsi tujuan Z = $\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$, untuk j = 1,2, …, n

Syarat ikatan $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq$ atau $\geq b_i$

Untuk I = 1,2, …, m dan $x_j \geq 0$

c_j = Koefisien harga variabel pengambilan keputusan dalam fungsi tujuan, atau parameter yang dijadikan kriteria optimasi.

X_j =Variabel pengambilan keputusan yang harus dicari atau bariabel aktivitas (keluaran atau output).

a_{ij} = Konstanta variabel aktivitas ke-j dalam pembatasan (kendala) ke-i.

b_i = Sumber daya yang terbatas atau konstanta (nilai sebelah kanan) dari pembatas ke-I, yang membatasi aktivitas berkaitan dengan usaha mengoptimalkan fungsi tujuan; b_1 juga disebut sebagai masukan (input).

Z = Nilai skalar yang berkaitan dengan kriteria pengambilan keputusan fungsi tujuan.

Dalam pemrograman linear terdapat tiga hal besar yang menjadi perhatian:

1. ***Formulasi Masalah*** yaitu mengubah masalah sehari-hari ke dalam bentuk matematika yang melibatkan :
   - Mendefinisikan variabel keputusan
   - Mendefinisikan fungsi tujuan
   - Mendefinisikan fungsi-fungsi kendala

2. ***Memecahkan masalah secara matematis*** yaitu menentukan nilai variabel keputusan yang mengoptimumkan fungsi tujuan. Beberapa metode yang dapat digunakan:
    - ♦ Metode Grafik (untuk masalah pemrograman linear dengan 2 variabel keputusan)
    - ♦ Metode Simplek (untuk masalah pemrograman linear dengan $\geq$ 2 var. keputusan)
    - ♦ Metode Revisi Simplek
    - ♦ Metode Dual Simplek
    - ♦ Metode untuk masalah khusus seperti Transportasi, Penugasan, Transhipment, dll.
3. ***Menganalisa hasil perhitungan matematis*** untuk menjawab permasalahan dalam dunia nyata (*analysis postoptimality*).

B. MASALAH OPTIMISASI

Dalam kehidupan sehari-hari, manusia cenderung untuk berprinsip ekonomi, yaitu dengan sumber daya terbatas dapat memperoleh hasil sebanyak-banyaknya. Banyak hal disekitar kita yang ingin dicari nilai optimumnya, seperti keuntungan maksimum, biaya minimum, dsb. Hal-hal tersebut menjadi dasar timbulnya masalah optimisasi.

Optimisasi ialah suatu proses untuk mencapai hasil yang ideal atau optimal (nilai efektif yang dapat dicapai). Dalam disiplin matematika optimisasi merujuk pada studi permasalahan yang mencoba untuk mencari nilai minimal atau maximal dari suatu fungsi riil.

1) $f(x_0) \leq f(x)$ untuk semua x dalam A, untuk proses *minimalisasi*

2) $f(x_0) \geq f(x)$ untuk semua x dalam A, untuk proses *maximalisasi.*

Jika masalah yang dioptimumkan bersifat kuantitatif, maka masalah optimum tersebut merupakan masalah ekstrem (maksimum dan minimum). Banyak hal yang ingin dicari nilai optimumnya memiliki kuantitatif. Pada kasus ini, istilah optimum dan ekstrem memiliki arti yang sama. Sebagian materi mengenai ekstrem sudah dibahas dalam mata kuliah kalkulus.

1. Optimisasi Fungsi Tanpa Kendala

Jika diberikan fungsi satu peubah $y = f(x)$, $x \in R$ yang terdiferensialkan n+ 1 kali, maka melalui deret Taylor di sekitar x_o dapat disimpulkan

bahwa jika

$f'(x_o) = f''(x_o) = \ldots . f^n(x_o) = 0,$

$f^{n+1)} \neq 0,$

a. untuk (n+1) ganjil: terjadi ekstrem, dan jika

   (i) $f^{n+1}(x_o) < 0$, maka f(x) mencapai maksimum di titik x_o

   (ii) $f^{n+1}(x_o) > 0$, maka f(x) mencapai minimum di titik x_o.

b. untuk (n+1) genap: terjadi titik infleksi bagi f(x) di titik x_o

Contoh 1:

Diberikan fungsi $y = f(x) = x^3$, sehingga diperoleh

$f'(x) = 3x^2$

$f'(x) = 6x$

$f'''(x) = 6$

Untuk x= 0 diperoleh

$f'(x) = 0$

$f''(x) = 0$

$f'''(x) = 6$

Karena (n + 1) ganjil, maka fungsi $y = x^3$ memiliki titik infleksi stasioner di titik x = 0.

2. Optimisasi Fungsi Dengan Kendala

Contoh 2:

Peternak ayam mempunyai kawat sepanjang 24 m yang akan digunakan untuk memagari kandang ayam berbentuk persegi panjang. Bagaimana ukuran kandang agar luasnya maksimum?

Penyelesaian

Misalkan p = panjang kandang

q = lebar kandang

maka luas kandang adalah L=p.q dan keliling adalah 2(p+q)=24 Akan ditentukan p dan q tak negatif yang memaksimumkan luas kandang L dengan **kendala** panjang kawat 2(p + q) = 24.

Permasalahan di atas adalah masalah optimisasi fungsi dua peubah dengan kendala berbentuk persamaan. Untuk menyelesaikan masalah di atas soal dapat diubah menjadi bentuk soal ekstrim fungsi satu peubah tanpa kendala dengan cara mengeliminasi salah satu peubahnya, mislanya q dan sebaginya.

$2\,(p+q)=24$

$q= 24/2-p = 12-p$

$L_{maks} = p \times q = p\,(12\text{-}p)$

$= 12p\text{-}p^2$

$= 12\text{- }2p$

$2p= 12$

$P = 12/2$

$p = 6$

$q = 12 – p$

$q = 12\text{-}6$

$q = 6$

$L_{maks} = p \times q$

$= 6 \times 6$

$= 36$

Sehingga didapat p= 6 dan q = 6 dan memberikan L_{maks} 36. Ini berate bahwa kandang yang harus dibuat dengan ukuran 6m kali 6m (berbentuk bujur sangkar)

C. FORMULASI MASALAH PEMPROGARAMAN LINEAR

Dalam kehidupan sehari-hari selalu ada saja masalah yang dihadpi o;leh suatu Negara, perusahaan, bahkan oleh seseorang. Secara umum masalah (*problem*) daftar ditapsirkan sebagai suatu kesenjangan antara yang seharusnya terjadi atau harapan dengan yang sesungguhnya yang terjadi atau keadaan sekarang.

Contoh 3

Sebuah Firma memproduksi sendiri rak buku dalam dua model, yaitu A dan B. Produksi rak buku dibatasi oleh persediaan material (papan kualitas tinggi) dan waktu yang terbatas mesin pemroses. Tiap unit A memerlukan $3m^2$ papan dan tiap unit B memerlukan $4m^2$ papan. Firma memperoleh 1.700 m^2 papan tiap minggu dari pemasok sendiri. Tiap unit A membutuhkan waktu 12 menit dari mesin pemroses dan tiap unit B membutuhkan waktu 30 menit. Setiap minggu memungkinkan total waktu mesin 160 jam. Jika keuntungan (profit) tiap unit A sebesar $2 dan tiap unit B sebesar $4, beberapa banyak unit dari tiap model akan di produksi tiap minggu!

Rumusan masalah yang ditampilkan oleh Brian diuraikan sebagai berikut.

1. Terdapat tujuan yang dicapai, yaitu mencapai keuntungan melalui produksi rak buku jenis A dan B di mana tiap jenis produksi itu telah direncanakan mempunyai harga (*nilai, konstanta, parameneter*) tertentu.

   Apabila banyaknya jenis rak buku A dan B disebut sebagai x_1 dan x_2 dengan harga tiap jenis/unit c_1 dan c_2 maka fungsi objektif (*tujuan*) tersebut ialah

   $Z= c_1x_1 + c_2x_2$ Memaksimumkan

   X_1 dan x_2 adalah keluaran *(output*) perusahaan dan disebut variabel aktivitas. Fungsi tujuan di atas berbentuk fungsi linear, karena tersirat perbandingan (proporsional) jika terjadi pertambahan pada tiap unit keluaran akan terjadi perubahan menyebar dalam proporsi (rasio) yang sama c_1 terhadap tiap x_1 dan c_2 terhadap x_2 atau dalam rumusan yang lebih umum

   $Z = c_j. x_j$ $\qquad$ j = 1,2,……………………….., n

Jadi aspek penting masalah program linear jika fungsi tujuan bentuk fungsi linear, adalah asumsi (atau anggapan) linearitas dan proporsionalitas.

2. Terdapat sumber daya atau masukan (i*nput*) yang berada dalam keadaan terbatas. Dalam hal ini, Firma mempunyai persediaan, melalui pemasok sendiri, yaitu tiap minggu 1700 m^2; dan waktu kerja mesin pemroses yang terbatas, yaitu tiap minggu 160 jam.

a. Papan $\longrightarrow$ Untuk tiap x_1 unit A diperlukan $3x_1$ m^2

Untuk tiap x_2 unit B diperlukan $4x_2$ m^2

b. Jam mesin $\longrightarrow$ Untuk tiap x_1 unit Adiperlukan 0,2 x_1 jam

Untuk tiap x_2 unit B diperlukan 0,5 x_2 jam

Masukan (persediaan) yang terbatas itu proporsional dan ada keterkaitan dengan keluaran (variabel aktivitas) sehingga dapat dirumuskan dalam hubungan yang linear, yaitu *pertidaksamaan linear.*

Papan: $3x_1 + 4x_2 \leq 1700$

Jam Mesin: $0{,}2\ x_1 + 0{,}5\ x_2 \leq 160$

Pembatas (kendala) tersebut harus memenuhi syarat yang terkait dengan keluaran, yaitu non-negatif, $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$.

Rumusan masalah yang direncanakan oleh Firma tersebut dan disajikan dalam bentuk rumusan kuantitatif menjadi *model matematika program linear* adalah

Fungsi tujuan Memaksimumkan $Z = 2x_1 + 4x_2$

Pembatas (kendala) $3x_1 + 4x_2 \leq 1700$

$2x_1 + 5x_2 \leq 1600$

Syarat keterkaitan keluaran $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$ (atau ditulis singkat $x_1, x_2 \geq 0$)

Catatan:

1. Keluaran non-negatif berarti paling sedikit tidak memproduksi, yaitu $x_1 = 0$ atau $x_2 = 0$
2. Tanda pertidaksamaan kurang dari (lebih kecil dari) mengandung makna paling banyak papan yang tersedia 1700 m^2 habis terpakai dan jam kerja mesin tidak boleh lebih dari 160 jam/minggu.
3. Masukan (input) positif berarti papan dan mesin yang akan dipakai untuk memproses tersedia.

Rumusan masalah yang dihadapi Firma tersebut dan diklasifikasi sebagai suatu program linear, selain aspek linearitas dan proporsionalitas, terdapat pengartian mendasar, yaitu;

1. Kriteria optimal fungsi tujuan ditentukan oleh jumlah sesuai dengan harga masing-masing variabel (*aditivitas*).
2. Nilai variabel pengambilan keputusan dapat merupakan bilangan bulat atau kalau diperlukan dapat saja sebagai pecahan (*divisibilitas*) dan
3. Semua konstanta atau parameter (nilai c_j pada fungsi tujuan, b_j sebagai sumber dana atau masukan yang tersebar menjadi a_{ij} secara proporsional menunjang variabel aktivitas) tetap atau ditentukan secara pasti.

Contoh 4

Sebuah perusahaan mebel memproduksi meja dan kursi menggunakan papan, kayu, dan jam pengerjaan. Setiap meja membutuhkan 5 unit papan, 2 unit kayu, dan 4 jam pengerjaan. Setiap kursi membutuhkan 2 unit papan, 3 unit kayu, dan membutuhkan 2 jam pengerjaan. Perusahaan dapat menjual seluruh produk dan memperoleh keuntungan $12 untuk setiap meja dan $8 untuk setiap kursi. Namun hanya 150 unit papan, 100 unit kayu, dan 80 jam yang dimiliki untuk setiap minggu. Perusahaan ingin mengetahui berapa banyak setiap produk harus diproduksi untuk memaksimumkan keuntungan sesuai dengan sumber yang ada.

Variabel keputusan perusahaan ingin mengetahui berapa unit masing-masing barang yang harus diproduksi.

x_1 = jumlah unit meja yang akan diproduksi

x_2 = jumlah unit kursi yang akan diproduksi

Fungsi tujuan perusahaan ingin memaksimumkan keuntungan.

Maks $f = 12x_1 + 8x_2$ → keuntungan dari setiap meja $12 dan kursi $8

Kendala kendalanya adalah hubungan antara variabel keputusan dengan masing-masing sumber serta keterbatasan sumber daya yang ada.

- Papan $5x_1 + 2x_2 \leq 150$
- Kayu $2x_1 + 3x_2 \leq 100$
- Waktu pengerjaan $4x_1 + 2x_2 \leq 80$

  $x_1, x_2 \geq 0$ → jumlah produk tidak negatif

Formulasi lengkap

Maks $f = 12x_1 + 8x_2$

ds $5x_1 + 2x_2 \leq 150$

$2x_1 + 3x_2 \leq 100$

$4x_1 + 2x_2 \leq 80$

$x_1, x_2 \geq 0$

Contoh 5

Ann Johnson baru membuka toko eceran makanan anjing. Tiga jenis makanan baru dibuat (Seniordog, Topdog, dan Popdog) dengan mencampur empat jenis makanan anjing (A, B, C, D) yang sudah ada selama ini. Dari analisa nutrisi diperoleh syarat berikut.

1. Seniordog harus mengandung setidaknya 25% B, dan tidak lebih dari 20% C.
2. Topdog harus mengandung setidaknya 50% A, dan tidak lebih dari 25% D.
3. Popdog harus mengandung setidaknya 25% A, 25% B, dan tidak mengandung C.

A, B, C, D setiap minggunya hanya tersedia sebanyak 1000, 1000, 750, 800 kg. Harga masing-masing bahan/kg adalah $0.5, $0.6, $0.4, $0.45. Ann Johnson yakin dapat menjual Seniordog, Topdog, Popdog masing-masing/kg seharga $0.9, $0.85, $0.9, dan permintaan ada untuk setiap hasil produksi. Ann Johnson ingin mengetahui campuran optimal agar keuntungannya maksimum.

Variabel keputusan

x_{AS} = jumlah bahan A yang terkandung dalam Seniordog

x_{BS} = jumlah bahan B yang terkandung dalam Seniordog

x_{CS} = jumlah bahan C yang terkandung dalam Seniordog

x_{DS} = jumlah bahan D yang terkandung dalam Seniordog

x_{AT} = jumlah bahan A yang terkandung dalam Topdog

x_{BT} = jumlah bahan B yang terkandung dalam Topdog

x_{CT} = jumlah bahan C yang terkandung dalam Topdog

x_{DT} = jumlah bahan D yang terkandung dalam Topdog

x_{AP} = jumlah bahan A yang terkandung dalam Popdog

x_{BP} = jumlah bahan B yang terkandung dalam Popdog

x_{CP} = jumlah bahan C yang terkandung dalam Popdog

x_{DP} = jumlah bahan D yang terkandung dalam Popdog

Fungsi tujuan

Maks $f = 0.9(x_{AS} + x_{BS} + x_{CS} + x_{DS}) – (0.5x_{AS} + 0.6x_{BS} + 0.4x_{CS} + 0.45x_{DS}) +$

$0.85(x_{AT} + x_{BT} + x_{CT} + x_{DT}) – (0.5x_{AT} + 0.6x_{BT} + 0.4x_{CT} + 0.45x_{DT}) +$

$0.90(x_{AP} + x_{BP} + x_{CP} + x_{DP}) - (0.5x_{AP} + 0.6x_{BP} + 0.4x_{CP} + 0.45x_{DP})$

$= 0.4x_{AS} + 0.3x_{BS} + 0.5x_{CS} + 0.45x_{DS} +$

$0.35x_{AT} + 0.25x_{BT} + 0.45x_{CT} + 0.4x_{DT} +$

$0.4x_{AP} + 0.3x_{BP} + 0.5x_{CP} + 0.45x_{DP}$

Kendala

$x_{BS} \geq 0.25\ (x_{AS}+x_{BS}+x_{CS}+x_{DS})$

$x_{CS} \leq 0.20\ (x_{AS}+x_{BS}+x_{CS}+x_{DS})$

$x_{AT} \geq 0.50\ (x_{AT}+x_{BT}+x_{CT}+x_{DT})$

$x_{DT} \leq 0.25\ (x_{AT}+x_{BT}+x_{CT}+x_{DT})$

$x_{AP} \geq 0.25\ (x_{AP}+x_{BP}+x_{CP}+x_{DP})$

$x_{BP} \leq 0.25\ (x_{AP}+x_{BP}+x_{CP}+x_{DP})$

$x_{CP} = 0$

$x_{AS} + x_{AT} + x_{AP} \leq 1000$

$x_{BS} + x_{BT} + x_{BP} \leq 1000$

$x_{CS} + x_{CT} + x_{CP} \leq 750$

$x_{DS} + x_{DT} + x_{DP} \leq 800$

$xij \geq 0$, i = A, B, C, D; j = S, T, P

Formulasi lengkap

Maks $f = 0.4x_{AS} + 0.3x_{BS} + 0.5x_{CS} + 0.45x_{DS} +$
$0.35x_{AT} + 0.25x_{BT} + 0.45x_{CT} + 0.4x_{DT} +$
$0.4x_{AP} + 0.3x_{BP} + 0.5x_{CP} + 0.45x_{DP}$

ds. $0.25x_{AS} - 0.75x_{BS} + 0.25x_{CS} + 0.25x_{DS} \leq 0$

$-0.20x_{AS} - 0.20x_{BS} + 0.80x_{CS} - 0.20x_{DS} \leq 0$

$-0.50x_{AT} + 0.50x_{BT} + 0.50x_{CT} + 0.50x_{DT} \leq 0$

$-0.25x_{AT} - 0.25x_{BT} - 0.25x_{CT} + 0.75x_{DT} \leq 0$

$-0.75x_{AP} + 0.25x_{BP} + 0.25x_{CP} + 0.25x_{DP} \leq 0$

$0.25x_{AP} - 0.75x_{BP} + 0.25x_{CP} + 0.25x_{DP} \leq 0$

$xCP = 0$

$x_{AS} + x_{AT} + x_{AP} \leq 1000$

$x_{BS} + x_{BT} + x_{BP} \leq 1000$

$x_{CS} + x_{CT} + x_{CP} \leq 750$

$x_{DS} + x_{DT} + x_{DP} \leq 800$

$xij \geq 0$, $i = A, B, C, D; j = S,T,P$

Contoh 6

Waktu penggunaan 2 mesin (A & B) dialokasikan utk memproduksi 2 jenis tekstil (t.biasa & t.halus). Dalam satu periode produksi, mesin A punya waktu 80 jam, mesin B punya wkt 60 jam. Per kodi, t. biasa perlu wkt pengolahan 2 jam di msn A dan 3 jam di B, t.halus prlu wkt 4 jam di A dan 2 jam di B. Harga jual t.biasa \$40/ kodi, t halus \$60/ kodi. Berapa tiap jenis tekstil dibuat supaya harga jual maksimum?

Tabel 1 Penggunaan Dua Mesin

	Waktu kerja mesin (jam)		Harga jual tekstil ($)
	A	B	
Tekstil biasa	2	3	40
Tekstil halus	4	2	60
Alokasi waktu mesin (jam)	80	60	

Penyelesaian

- Identifikasi variabel:

  x = banyak tekstil biasa

  y = banyak tekstil halus
- Identifikasi fungsi tujuan:

  Maksimumkan: $z = 40x + 60y$
- Identifikasi fungsi-fungsi kendala:

  Mesin A: $2x + 4y \leq 80$

  Mesin B: $3x + 2y \leq 60$
- Syarat tak negatif (hidden condition): $x, y \geq 0$

Model PL lengkap

Maksimumkan: $z = 40x + 60y$

Terhadap kendala:

$$2x + 4y \leq 80$$

$$3x + 2y \leq 60$$

$$x, y \geq 0$$

Contoh 7

Perusahaan cat memproduksi cat interior dan cat eksterior. Dua bahan A & B digunakan. Kebutuhan bahan utk tiap cat beserta persediaannya terlihat pada tabel di bawah. Survei menunjukkan bhw permintaan harian cat interior melebihi cat eksterior tidak lebih dari 1 ton. Permintaan maksimum cat interior adl 2 ton/ hari. Harga jual cat eksterior \$3000/ hari, sedangkan cat interior \$2000. Berapa produksi tiap cat supaya harga jual maksimum ?

Tabel 2 Perusahaan Cat

	Ton bahan per ton cat		Persediaan maksimum
	Eksterior	Interior	
Bahan A Bahan B	1 2	2 1	6 8

Penyelesaianya:

- Identifikasi variabel

  x_1 = banyak produk cat eksterior

  x_2 = banyak produk cat interior
- Identifikasi fungsi tujuan/ fungsi obyektif

  Maksimumkan $z = 3000x_1 + 2000x_2$
- Identifikasi fungsi-fungsi kendala

  Penggunaan bahan vs persediaan:

  $x_1 + 2x_2 \leq 6$ (bahan A)

  $2x_1 + x_2 \leq 8$ (bahan B)

  Kelebihan cat interior thd cat eksterior:

  $-x_1 + x_2 \leq 1$

Permintaan maksimal cat interior: $x_2 \leq 2$ Kendala tersembunyi (hidden condition): banyak produk tidak boleh negatif $x_1, x_2 = 0$

Model PL lengkap

Fungsi tujuan

Maksimumkan: $z = 3000x_1 + 2000x_2$

$= 3x_1 + 2x_2$ ($ ribu)

Terhadap kendala: $x_1 + 2x_2 \leq 6$

$2x_1 + x_2 \leq 8$

$-x_1 + x_2 \leq 1$

$x_2 \leq 2$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Contoh 8

Seorang pedagang (pengusaha kecil) telah menerima dua jenis kembang gula dari seorang pengusaha. Dalam tiap jenis memuat *coklat, karamel* dan *gula* dengan perbandingan.

	Cokelat	Karamel	Gula
Jenis A (%)	20	20	60
Jenis B (%)	20	60	20

Kedua jenis ini dicampur dan kemudian dimasak lagi untuk dijadikan kembang gula lagi dengan label sendiri; dengan perhitungan kembang gula dengan label baru akan lebih laku jika memuat paling sedikit 4 kg cokelat, paling sedikit 6 kg karamel, dan paling sedikit 6 kg gula. Harga jenis A adalah $10 per kg dan jenis B $15 per kg. Berapa banyak dari tiap jenis harus dicampur supaya biaya serendah-rendahnya.

Model PL Lengkap

Fungsi tujuan

Meminimumkan $Z = 10\ x_1 + 15\ x_2$

Pembatas $x_1 + x_2 \geq 20$

$X_1 + 3x_2 \geq 30$

$3x_1 + x_2 \geq 30$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

D. PERSOALAN PROGRAM LINIEAR DENGAN NOTASI MATRIKS-VEKTOR

Dengan menggunakan notasi matriks-vektor, rumusan persoalan suatu program linear dapat disajikan sebagai berikut.

Maksimum (atau minimum) $Z = c^T X_o$ (i)

Di mana $x_o \geq 0$ (ii)

Dan $A_o x_o \leq b$ (iii)

Di mana $c^T = (\ c_1, c_2, \ldots.\ C_n)$, vektor baris 1 x n

$X_o = (\ x_1, x_2, \ldots, x_n)$, vektor kolom n x 1

$B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, vektor kolom m x 1

Dan $A_o = (a_{ij})$ adalah matriks dengan orde m x n

Indeks "o" pada x_o dan A_O menunjukan matriks kolom dengan masukan (entri, unsur) variabel pokok dan matriks A yang berisikan koefisien variabel pokok sesuai dengan banyak pembatas.

Dengan menggunakan notasi matriks-vektor, rumusan persoalan suatu program linear dapat disajikan sebagai berikut.

Maksimum (atau minimum) $Z = c^T X_o$ (i)

Di mana $x_o \geq 0$ (ii)

Dan $A_o x_o \leq b$ (iii)

Di mana $c^T = (\ c_1, c_2, \ldots.\ C_n)$, vektor baris 1 x n

$X_o = (\ x_1, x_2, \ldots, x_n)$, vektor kolom n x 1

$$B = (b_1, b_2, \ldots., b_m), \text{ vektor kolom m x 1}$$

Dan $A_o = (a_{ij})$ adalah matriks dengan orde m x n

Indeks "o" pada x_o dan A_O menunjukan matriks kolom dengan masukan (entri, unsur) variabel pokok dan matriks A yang berisikan koefisien variabel pokok sesuai dengan banyak pembatas.

Contoh 9

Fungsi tujuan

Maksimum $Z = 4x_1 + 3x_2$

Pembatas $3x_1 + 4x_2 \leq 12$

$7x_1 + 2x_2 \leq 14$

$X_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

1. Variabel pokok (keluaran) x_1 dan x_2
2. Kalau di dalam ruas kiri pertidaksamaan pembatasan ditambah variabel penambah (slack), s_1 dan s_2 dengan syarat tetap non-negatif banyak variabel menjadi 4.

Rumusan persoalan Contoh 9 menjadi

$$Z = 4x_1 + 3x_2 + 0.s_1 + 0.s_2$$

$$3x_1 + 4x_2 + s_1 = 12$$

$$7x_1 + 2x_2 + s_2 = 14$$

$$X_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Pada prinsipnya setiap persoalan program linear dapat dipecahkan atau menghasilkan penyelesaian. Namun, tidak bisa dihindari akan terjadi 3 kategori yaitu (1) ada satu pemecahan yang menunjukan fungsi tujuan mencapai optimal, (2) ada satu penyelesaian tak terikat, (3) tidak terdapat penyelesaian layak dari suatu persoalan yang dirumuskan ke dalam bentuk program linear. Tentang satu pemecahan optimal ternyata terdapat dua *alternatif,* yaitu: jawaban tunggal yang dicapai pada satu titik (untuk masalah dua atau tiga variabel pokok); dan nilai optimal dicapai oleh dua titik atau lebih dalam daerah penyelesaian.

Untuk memperlihatkan ketiga kategori di atas, perhatikan contoh berikut.

Contoh untuk jawaban tunggal, kita memperhatikan persoalan pada contoh 9 di atas.

Fungsi tujuan

Maksimum $Z = 4x_1 + 3x_2$

Pembatas $3x_1 + 4x_2 \leq 12$

$7x_1 + 2x_2 \leq 14$

$X_1 , x_2 \geq 0$

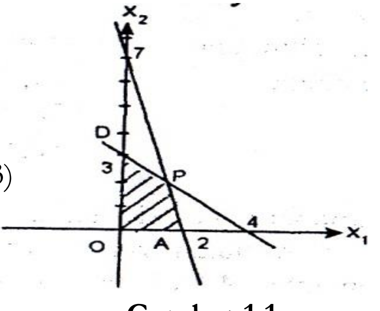
Pemecahan masalah dua variabel pokok merupakan penerapan cara pemecahan sistem pertidaksamaan linear.

Lihat gambar di samping. Daerah arsiran adalah daerah layak.

$Z_1 = 8$ A (2,0)

$Z_2 = \frac{127}{11}$ P $(\frac{16}{11}, \frac{21}{11})$

$Z_3 = 9$ D (0,3)



Gambar 1.1

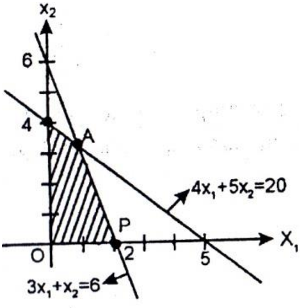
Jika nilai maksimum Z dicapai pada titik sudut P dari poligon daerah layak OAPD.

Contoh 10

Maksimum $Z = 6x_1 + 2x_2$

Pembatas non-negatif $4x_1 + 5x_2 \leq 20$

$3x_1 + x_2 \leq 6$



Gambar 1.2

Perhatikan gambar ternyata gradien garis $3x_1 + x_2 = 6$ sama dengan gradien $6x_1 + 2x_2 = 12$ dalam hal ini Z = 12 ; di titik A $(\frac{10}{11}, \frac{36}{11})$ Z = 12; di titik P (2,0) dan untuk tiap titik pada ruas garis AP tetap Z = 12, inilah masalah penyelesaian yang berkaitan dengan penetapan koefisien harga pada fungsi tujuan. Di titik R(0,4) nilai Z= 8.

Dengan demikian Contoh 1.2 adalah contoh penyelesaian optimum yang dicapai oleh dua titik atau lebih.

Contoh 11

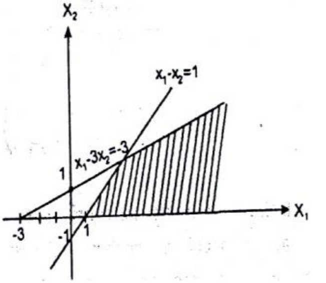
Penyelesaian tak terikat

Fungsi tujuan Maksimum $Z = x_1 + x_2$

Pembatas $x_1 - x_2 \geq 1$

$X_1 - 3x_2 \geq -3$

$X_1 \geq 0$; $x_2 > 0$



Gambar 1.3

Lihat Gambar 1.3 di atas, daerah arsiran menunjukan kepada kita, terbuka peluang untuk terus mempertinggi nilai fungsi tujuan atau dalam perencanaan kita melihat adanya ketidakterikatan pemecahan. Bagaimana pendapat Anda tentang penetapan kriteria dan koefisien variabel aktivitas pada fungsi tujuan masalah contoh 1.20? Silakan Anda memberi komentar dan apakah perlu kita hindari kondisi seperti ini dalam perencanaan, Bagaimana komentar Anda?

Contoh 12

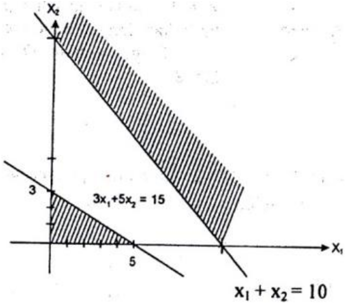
Tidak terdapat penyelesaian

Minimumkan $Z = 2x_1 + 3x_2$

Subjek $x_1 \geq 0$; x_2 0

$3x_1 + 5x_2 \leq 15$

Lihat Gambar 1.4 di bawah, daerah yang ditujukkan dengan dua pembatas, yang tidak saling menunjang. Kesimpulannya, tidak terdapat penyelesaian optimal.



Gambar 1.4

Bahasan tentang kategori suatu masalah program linear dilihat dari banyak pemecahan terlihat sederhana karena masalah yang sementara dibahas hanya terbatas dalam 2 variabel pokok. Bila banyak variabel pokok lebih dari dua maka kesimpulan seperti di atas relatif tidak sederhana, karena kita menghadapi matriks bujur sangkar n x n dengan n lebih dari 2, di mana menentukan det (A) = 0

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas kerjakanlah latihan berikut!

1) Perusahaan Aneka mendapat jatah merakit sepeda dan sepeda motor. Karena jumlah pekerja terbatas, perusahaan hanya dapat merakit sepeda 120 unit tiap bulan dan sepeda motor paling sedikit 10 unit dan paling banyak 60 unit. Pendapatan dari tiap unit sepeda sebesar Rp40.000,00 dan tiap unit sepeda motor Rp268.000,00. Berapa pendapatan maksimum tiap bulan kalau kapasitas produksi kedua jenis 160 unit.
   a. Rumusan fungsi tujuan!
   b. Rumusan pembatas!
   c. Tanpa menghitung terlebih dahulu, perlihatkan daerah pemecahan yang ditunjukkan dengan pembatas dengan gambar!
   d. Kemudian titik manakah yang menunjukan nilai maksimum fungsi tujuan. Berikan alasan!
2) Seorang penjahit mempunyai 60 m wol dan 40 m katun. Dengan yang tersedia itu, penjahit membuat setelan jas dan rok kepada beberapa orang pelanggan. Satu stel jas memerlukan 3 m wol dan 1 m katun, satu rok memerlukan 2 m wol dan 2 m katun. Berapa stel jas dan rok harus dibuat oleh penjahit kalau harga satu stel jas Rp120.000,00 dan harga satu stel rok (baju wanita) Rp75.000,00 untuk memperoleh pendapatan maksimum.

a. Tentukan fungsi tujuan:
b. Tentukan pertidaksamaan yang menunjukan pembatas lengkap dengan syarat yang diperlukan!
c. Gambarlah daerah pemecahan pertidaksamaan pembatas itu kemudian tentukan koordinat titik sudut poligon (atau segi banyak) pada pembatas itu!
d. Hitunglah nilai maksimum fungsi tujuan!

3) Seorang tukang roti mempunyai bahan A,B dan C dengan banyak yang tersedia berturut-turut 300 unit, 180 unit, dan 300 unit. Dengan bahan yang tersedia, tukang roti membuat dua macam roti sesuai dengan pesanan langganan. Pembuat roti menetapkan keperluan bahan sebagai berikut.

Macam roti	Bahan A	Bahan B	Bahan C
I	2	2	4
II	10	4	2

a. Rumuskan fungsi tujuan dan pembatas.
b. Harga roti I sebesar Rp350,00 dan ke II Rp800,00. Berapa banyak tiap macam harus dibuat untuk memperoleh hasil penjualan terbanyak? Berapa rupiah jumlah terbesar yang diperoleh pembuat roti?
c. Jika roti macam I dijual dengan harga Rp450,00 dan macam II tetap Rp800,00. Apakah dia akan mengubah rencana semula? Kalau terjadi perubahan, berapa banyak roti dari tiap macam harus dibuat oleh pembeli roti itu. Berapa rupiah akan diterima kalau semua roti itu habis terjual?

4) Telitilah rumusan program linear berikut dengan bantuan gambar.

(i) Maks $Z = 4x_1 + 3x_1$ (ii) Min $Z = 12x_1 + 2x_2$

Batas $2x_1 + 3x_2 \leq 6$ Batas $x_1 - x_2 \leq 0$

$4x_1 + x_2 \leq 4$

$X_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

$x_1 - x_2 \geq 7$

$6x_1 + x_2 \geq 12;$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

(ii) Maks $Z = 2x_1 - 5x_2$

Batas $7x_1 + 4x_2 \leq 28$

$x_1 - x_2 \geq 3$

$3x_1 + 8x_2 \geq 16$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

(iv) Maks $Z = 2x_1 + 5x_2$

Batas $4x_1 - 3x_2 \geq -12$

$x_1 - 4x_2 \leq 5$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

(v) Min $Z = 12x_1 + 5x_2$

Batas $-4x_1 + x_2 \geq 2$

$X_1 - x_2 \geq 3$

$3x_1 - 4x_2 \geq 5$

$X_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

Rumusan

a. Program linear dengan pemecahan tunggal adalah . . .
b. Optimal alternative adalah . . .
c. Tidak terdapat nilai optimal biarpun terdapat system persamaan pembatas konsisten, adalah . . .
d. Tanpa batas adalah . . .
e. Tidak ada daerah layak adalah . . .
f. Carilah nilai optimal dari jawaban Anda pada soal (a) dan (b).

RANGKUMAN

Program linear, kata benda dari pemrograman linear (*linear programming*),muncul dalam bidang penelitian operasional (*operational research*), telah terbukti sebagai cara yang paling tepat untuk penyelesaian masalah tertentu. Ide ini pertama kali dikembangkan dalam bidang kemelitiran selama Perang Dunia Kedua, kemudian dikembangkan di dalam bidang pemerintahan, manajemen, komersial dan perdangangan, aplikasi dalam bidang industri, dan lainnya.

Formulasi atau Model matematika suatu program linear menunjukan bentuk sajian data program linear dengan simbol (notasi lambang) matematika, yaitu (1) Fungsi tujuan $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sebagai fungsi linear dengan variabel aktivitas (keluaran) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, (2) sumber daya yang terbatas di mana tiap pembatas secara proporsional menunjang tiap variabel aktivitas. Umumnya variabel aktivitas non-negatif.

Pembatas adalah suatu sistem pertidaksamaan linear.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n \leq \text{atau} \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq \text{atau} \geq b_2$$

$$\ldots \quad + \ldots \quad + \ldots.$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq \text{atau} \geq b_m$$

Dengan notasi matriks/ vektor rumusan di atas menjadi

$$Z = c^T x_j \text{ maks (atau Min)}$$

$$X_o \geq 0$$

$$A_o x_o \leq \text{atau} \geq b$$

$C^T = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$; vektor baris 1 x n; $x_o = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektor kolom n x 1; $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vektor kolom m x 1 dan $A_0 = (a_{ij})$ matriks orde m x n dari koefisien x_1 pada pembatas.

Rumusan pembatas di atas menunjukan bahwa terdapat kombinasi tanda "≤" atau "≥" dalam satu sistem pertidaksamaan sebagai pembatas. Rumusan resmi (kanonik) atau masalah program linear adalah sebagai berikut.

1. Masalah memaksimumkan

   Fungsi tujuan $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j$; j = 1,2,…,n

   Pembatas $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \leq b_i$

   Untuk i= 1,2,…, m ; xj > 0

2. Masalah meminimumkan

   Fungsi tujuan $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j$; j = 1,2,…,n

   Pembatas $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \geq b_1$; $x_j \geq 0$; I = 1,2,….,m

Tanda pertidaksamaan yang sama dalam rumusan suatu program linear dalam bentuk kanonik akan membantu kita untuk menyusun program dual dari masalah primal yang sudah ditetapkan lebih dahulu (akan dibahas pada modul 5).

Memperhatikan daerah hasil layak yang kita gambar dan juga penerapan pengertian rank matriks koefisien dan rank matriks yang diperbesar dari suatu masalah program linear (1) mempunyai pemecahan optimal tunggal, (2) optimal alternatif, (3) optimal tanpa batas, dan (4) tidak terdapat nilai Z optimal yang mungkin berdampak kurang tepat dalam penetapan sebaran yang proporsional dari tiap pembatas (persediaan) untuk menunjang tiap variabel aktivitas.

UJI KOMPETENSI

Pililah satu jawaban yang paling tepat!

Untuk nomor 1 sampai dengan 3!

Seorang pengusaha penitipan (parkir) kendaraan (roda 4 atau lebih) menyediakan ruangan seluas 600 m^2. Tiap mobil jenis sedan/minibus memerlukan 6 m^2 dan tiap mobil jenis bus memerlukan 30 m^2. Supaya tersedia biaya untuk pemeliharaan bangunan, pengusaha itu menetapkan kepada biaya untuk pemeliharaan bangunan, pengusaha itu menetapkan kepada pelanggan bahwa tidak menampung lebih dari 60 kendaraan sekaligus. Kepada pelanggan dikenakan biaya penitipan (tiap malam), Rp 1.250,00 untuk tiap mobil jenis sedan dan Rp 3.750,00 untuk tiap bus.

Berapa banyak kendaraan dari tiap jenis harus ditampung supaya pendapatan yang diperoleh maksimal.

1) Kalau variabel aktivitas x_1 untuk sedan dan x_2 untuk bus maka pembatas dengan syarat non-negatif adalah . . .

A. $x_1 + 5x_2 \leq 100$
$x_1 + x_2 \leq 60$

B. $X_1 + x_2 \leq 60$
$5x_1 + x_2 \leq 100$

C. $5x_1 + x_2 \leq 60$
$x_1 + x_2 \leq 100$

D. $x_1 + x_2 \leq 100$
$x_1 + 5x_2 \leq 60$

3) Pasangan berurutan (x_1, x_2) yang terdapat dalam daerah hasil layak pemecahan sistem pertidaksamaan pembatas adalah alternatif yang terjual, *kecuali* …

A. (60,0)
C. (0,20)
B. (10,50)
D. (50,10)

4) Nilai maksimum fungsi tujuan adalah …

A. Rp 100.000,00
C. Rp 225.000,00
B. Rp 200.000,00
D. Rp 272.500,00

Untuk nomor 4 dan 5.

Seorang agen sepeda bermaksud membeli 25 buah sepeda untuk persedian. Harga sepeda biasa Rp60.000,00/ buah dan sepeda balap Rp80.000,00/ buah. Ia merencanakan untuk tidak meneluarkan lebih dari Rp 1.680.000,00 dengan mengharapkan keuntungan Rp 10.000,00 dari tiap sepeda biasa dan Rp12.000,00 dari tiap sepeda balap.

5) Kalau variabel x_1 = banyak sepeda balap; x_2 = banyak sepeda biasa maka fungsi tujuan adalah …

A. $Z = 10.000\ x_1 + 12.000\ x_2$

B. $Z = 60.000\ x_1 + 80.000\ x_2$

C. $Z = 12.000\ x_1 + 10.000\ x_2$

D. $Z = 80.000\ x_1 + 60.000\ x_2$

6) Pembatas dengan syarat x_1 dan x_2 non-negatif adalah …

A. $X_1 + x_2 \leq 25$
$6x_1 + 8x_2 \leq 168$

B. $X_1 + x_2 \leq 25$
$8x_1 + 6x_2 \leq 168$

C. $X_1 + x_2 \leq 25$
$10x_1 + 12x_2 \leq 1680$

D. $X_1 + x_2 \leq 25$
$12x_1 + 10x_2 \leq 1680$

Untuk nomor 6 sampai dengan 8.

Seorang pengusaha di bidang tempat kos/sewa rumah merencanakan membangun untuk disewakan kepada 540 orang pelajar/mahasiswa. Supaya tersedia tanah untuk sarana olahraga, pengusaha menetapkan untuk membangun tidak lebih dari 120 rumah yang terbesar menjadi dua tipe. Tipe I (untuk 4 orang) disewakan Rp90.000,00 sebulan tiap rumah, dan tipe II (untuk 6 orang) disewakan Rp 107.000,00. Variabel aktivitas x_1 untuk rumah tipe I dan x_2 untuk rumah tipe II.

7) Pembatas adalah:

A. $X_1 + x_2 \leq 120$
$2x_1 + 3x_2 \leq 270$

B. $X_1 + x_2 \leq 540$
$2x_1 + 3x_2 \leq 120$

C. $X_1 + x_2 \leq 120$
$3x_1 + 2x_2 \leq 270$

D. $X_1 + x_2 \leq 540$
$3x_1 + 2x_2 \leq 270$

8) Pasangan berurutan (x_1, x_2) yang merupakan titik sudut daerah pemecahan pembatas persoalan itu adalah alternatif yang tersedia *kecuali* …

A. (120,0) C. (90,30)

B. (115,15) D. (100,20)

9) Nilai terbesar fungsi tujuan Z adalah …..

A. 10.000.000 B. 10.885.000

B. 11.310.000 D. 11.140.000

10) Perhatikan $Z = 6x_1 + 2x_2$ Maks

$$4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$3x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0$$

Optimal ganda Z dicapai di titik…

A. (0,12) C. (5,0)

B. (2,0) D. (0,4)

11) Titik yang terdapat dalam daerah pemecahan sistem pertidaksamaan yang merupakan pembatas program linear

$Z = 2x_1 + 6x_2$ Maks

$$7x_1 + 4x_2 \leq 28$$

$$X_1 + x_2 \geq 3$$

$$5x_1 + x_2 \geq 5$$

$$X_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \geq 0$$

Adalah …

A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ C. $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

B. (2,0) D. (0,2)

BAB II

PROGRAM LINEAR DENGAN METODE GRAFIK DAN METODE SIMPLEKS DUA VARIABEL

A. PENDAHULUAN

Bab ini terfokus pada upaya menganalisis persoalan program linear dua variabel pokok dengan metode grafik dan metode simplek khusus untuk masalah dua variabel atau dua peubah.

Perlu diingat program linear merupakan teknik analisis kuantitatif yang tergabung dalam penelitian operasional. Analisis kuantitatif di sini mengandung makna proses pengembangan secara bertahap dan sistematis dengan memperhatikan tiga tahap (1) identifikasi persoalan dan penyusunan model matematika (2) analisis model (3) merumuskan kesimpulan dan implementasi hasil.

Sebagian aspek yang termasuk dalam tahap identifikasi dan penyusunan model matematika telah di bahas dalam bab 1 dengan persoalan yang ditemukan dalam dunia nyata diterjemahkan ke dalam model matematika sebagai suatu bentuk abstraksi. Proses penyelesaian persoalan melalui analisis matematika dibuat demikian sehingga tetap mendekati kenyataan, sesuai dengan kegiatan yang dilakukan pada tahapan perencanaan.

Khusus soal program linear dengan dua variabel tersedia penyelesaian salah satunya dengan metode grafik. Meskin dalam praktek program linear jarang hanya memuat dua variabel, tetapi metode grafik mempermudah dalam memahami pengertian-pengertian yang timbul dalam program linear.

B. METODE GRAFIK

Pada umumnya metode grafik mengikuti langkah-langkah sebagai berikut :

- Merumuskan masalah asli menjadi model matematika yang sesuai dengan syarat-syarat yang diperlukan dalam model Program Linier, yaitu mempunyai *fungsi tujuan, fungsi kendala, syarat ikatan non-negatif.*
- Kendala-kendala yang ada digambar hingga dapat diperoleh *daerah penyelesaian (Daerah yang Memenuhi Kendala(DMK)/Wilayah Kelayakan)/ Daerah Fisibel* yang titik-titik sudutnya diketahui dengan jelas.
- Nilai fungsi sasaran (fungsi tujuan) dihitung di setiap titik sudut daerah penyelasaian (DMK).
- Dipilih nilai yang sesuai dengan fungsi tujuan (kalau memaksimumkan berarti yang nilainya terbesar dan sebaliknya).
- Jawaban soal asli sudah diperoleh

UNTUK Menentukan solusi yang optimal dengan menggunakan metode grafik, ada dua cara yang bisa digunakan yaitu

1. Menggunakan garis sejajar
2. Dengan titik sudut (corner point)

1. Menggunakan garis sejajar

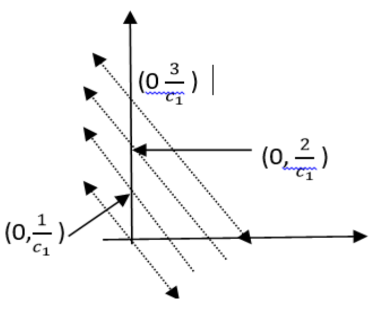
Sasaran analisis persoalan program linear yang telah diterjemahkan menjadi bentuk matematika ialah meningkatkan nilai fungsi tujuan F $(x_1, x_2,\ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ yang terkait kepada pembatasan sumber daya yang tersedia.

Untuk itu tentang persoalan dua variabel pokok bahasan dimulai dari upaya meningkatkan nilai fungsi tujuan.

$$Z = c_1x + c_2y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

1. $x \geq 0$ dan $y \geq 0$; c_1 dan c_2 positif

Perhatikan Gambar (2.1) garis sejajar dengan $c_jx + c_2y = 0$ memperlihatkan perubahan nilai z yang ditunjukan dengan jarak sepanjang sumbu y dihitung dari 0 (0,0).



0 nilai awal z, awal kegiatan analisis

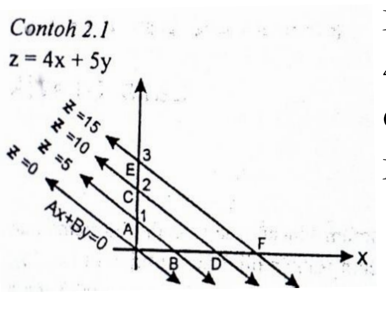
$X + c_2y = 1; z = 1$

$X + c_2y = 2; z = 2$

$X + c_2y = 3; z = 3$ dan seterusnya

Gambar 2.1

Makin jauh garis sejajar $c_1x + c_2y = 0$ dari 0 (0,0) berarti nilai-nilai z makin besar (meningkat).



Lihat gambar 2.2 di samping,

$4x + 5y = z$; $y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$

Garis sejajar $4x + 5y = 0$

Melalui B $(\frac{5}{4}, 0)$; A $(0,1) \Rightarrow z = 5$

Melalui D ($\frac{10}{4}$, 0); C (0,2) => z =1

Melalui F 9$\frac{15}{4}$, 0);E (0,3)=>Z =15

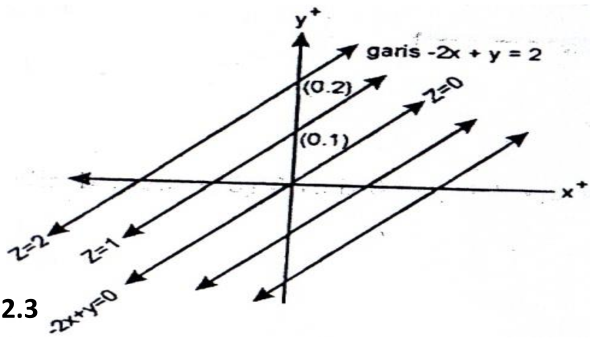
Gambar 2.2

Dan seterusnya, makin jauh dari E dan sejajar $4x + 5y = 0$ menunjukan peningkatan nilai z.

2. $x \geq 0$; $y \geq 0$; $c_1 \geq 0$ $c_2 \leq 0$ atau $c_1 \leq 0$, $c_2 \geq 0$

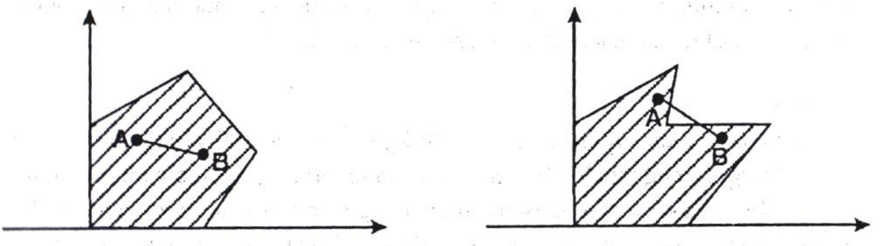
   contoh 2.2

z= 2x – y dan z = -2x + y; gradien dengan persamaan 2x – y = 0 sama dengan gradien garis – 2x + y = 0, lihat Gambar (2.3). Analog dengan proses contoh 1 nilai z terbesar diperlihatkan dengan garis yang sejajar dengan garis 2x – y = 0 dan terletak paling jauh dari (0,0) di atas sumbu x; perhatikan daerah di atas sumbu x, karena syarat variabel non-negatif



Gambar 2.3

Selanjutnya perhatikan kembali daerah layak (penyelesaian) sistem pertidaksamaan yang merupakan pembatas suatu program linear. Daerah layak sistem pertidaksamaan memperlihatkan dua kemunginan bidang arsiran yaitu (1) bidang konveks seperti Gambar 2.4 (i) dan bidang yang tidak konveks seperti Gambar 2.4 (ii). Bidang konveks menunjukan suatu polihedral di mana untuk tiap dua titik sebarang A dan B di dalam bidang terdapat segmen $\overline{AB}$*sepenuhnya* di dalam bidang itu. Bidang tidak konveks menampilkan bagian ruas garis $\overline{AB}$ terdapat di luar bidang itu

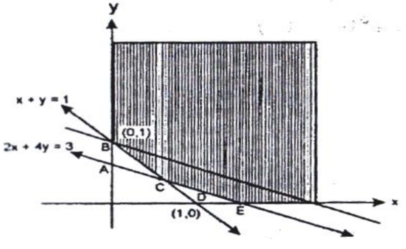


Gambar 2.4

Garis sejajar ax + by = 0 dari z = ax + by yang menunjukan z_1, z_2…, z optimal disebut sebagai garis selidik. Karena proses menentukan nilai optimal z menggunakan bantuan grafik garis untuk menyelidiki titik manakah dalam bidang layak yang menunjukan nilai z optimal maka prosedur itu dapat kita sebut sebagai metode grafik untuk mencari pemecahan persoalan program linear.

Contoh 2.3

Carilah nilai minimum z = x + 2y dalam kondisi pembatasan



X + y ≥ 1

2x + 4y ≥ 3

X ≥ 0; y ≥ 0

Lihat gambar di samping

Gambar 2.5

Gambar garis $x + 2y = 0$ dan beberapa garis yang sejajar dengan garis itu melalui titik-titik dalam daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan (pembatas). Ternyata salah satu garis yang sejajar dengan $x + 2y = 0$ adalah $2x + 4y = 3$, melalui A $(0, \frac{3}{4})$; C $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; E $(\frac{3}{2}, 0)$. Nilai $z = \frac{3}{2}$ diperoleh bila disubstitusikan koordinat A atau C atau E ke persamaan $z = x + 2y$. Inilah contoh masalah program linear dengan optimal alternatif, karena terdapat dua pasangan (x,y) yang menunjukan nilai Z yang sama dan optimal (minimum), dua pasangan berurutan (titik) tersebut adalah C dan E. yang terdapat dalam daerah penyelesaian (arsiran).

Contoh 2.4.

Pengusaha kacang mempunyai 120 kg kacang mete (biji jambu monyet) dan 192 kg kacang tanah. Dua macam kacang tersebut akan dicampur dalam bentuk bungkusan (paket). Bungkusan dengan mutu campuran rendah (II) terdiri atas 4 ons kacang mete dan 12 ons kacang tanah dan bungkusan dengan mutu campuran tinggi (I) terdiri atas 8 ons kacang mete dan 8 ons kacang tanah. Tiap bungkusan mutu II memberi keuntungan Rp250,00 dan tiap bungkusan mutu I memberi keuntungan Rp450,00. Berapa banyak bungkus tiap mutu campuran harus dibuat untuk memperoleh keuntungan maksimum.

Pertama, misalkan variabel,

X = banyak bungkus dengan mutu campuran II

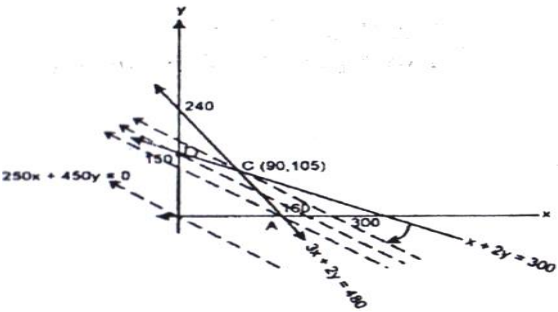
Y = banyak bungkus dengan mutu campuran I

Fungsi tujuan $P = 250x + 450y$ di sini $x \geq 0; y \geq 0$

Pembatas yaitu bahan yang tersedia

$$4x + 8y \leq 1200 \longrightarrow x + 2y \leq 300 \ldots (1)$$

$$12x + 8y \leq 1920 \longrightarrow 3x + 2y \leq 480 \ldots (2)$$



Gambar 2.6

Perhatikan Gambar 2.6 di atas.

Titik sudut daerah hasil layak sistem pertidaksamaan ialah A (160,0); C (90,105); D (0,150) serta 0(0,0), buatlah beberapa garis selidik yang sejajar dengan garis 250x + 450y = 0 seperti yang ditunjukan dengan garis putus-putus, melalui A, D, C. Ternyata garis terjauh melalui C (90,105) sehingga nilai maksimum P = (250 X 90) + (450 X 105) = 69.750, sebab di titik A (160,0) nilai P = 40.000 dan di D (0,150) nilai P= 67.500.

Catatan: prosedur di atas menampilkan langkah/tahap,

a. Nyatakan fungsi tujuan (maksimum atau minimum) dan pembatas.
b. Gambarlah daerah layak yang memenuhi semua pembatas.
c. Tentukan koordinat titik sudut dari segi banyak konveks yang ditunjukan dengan daerah layak sistem pertidaksamaan (pembatas).
d. Tentukan nilai optimal fungsi tujuan dengan memperhatikan garis selidik terjauh dari o (0,0) melalui titik susut tertentu dalam daerah layak (catatan 3)

Contoh 2.5

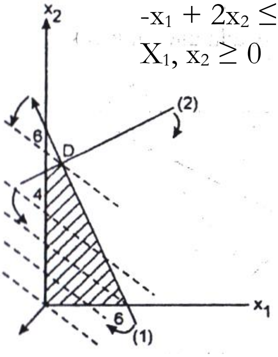
Contoh ini menampilkan kondisi fungsi tujuan seperti alternatif (c_1 dan c_2 negatif) tetapi pembatas dalam kombinasi pertidaksamaan berbeda dengan beberapa contoh terdahulu.

Minimum $\quad z = -x_1 - 3x_2$

Di mana $\quad x_1 + x_2 \leq 6 \ldots (1)$

$-x_1 + 2x_2 \leq 8 \ldots (2)$

$X_1, x_2 \geq 0$



Gambar 2.7

Lihat gambar di samping

1) Garis putus-putus ialah garis selidik yang sejajar $-x_1 - 3x_2 = 0$
2) Titik sudut A (6,0), B(0,6), C(0,4),

   D $\left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)$

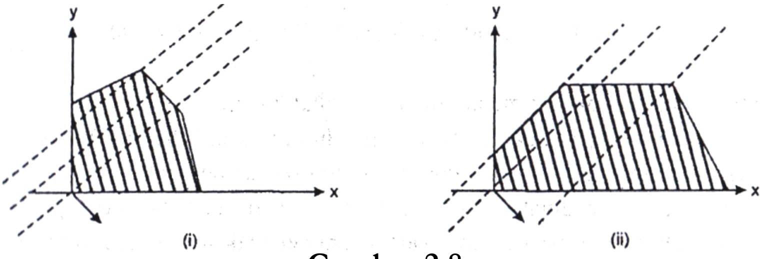
   Titik yang termasuk dalam daerah layak adalah A, D, dan C. Garis selidik melalui D menunjukan

   nilai $z = \frac{-4}{4}$ ialah nilai minimum.

   Mengapa? Silahkan Anda teliti kembali.

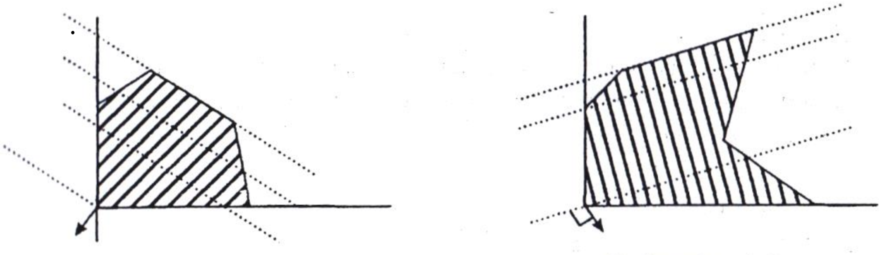
Beberapa contoh di atas termasuk contoh di atas menampilkan:

1. Nilai optimal fungsi tujuan tertentu dan tunggal. Lihat gambar:
   a. Daerah penyelesaian ialah polohedral konveks dan tertutup.
   b. Daerah penyelesaian ialah bidang konveks terbuka.



Gambar 2.8

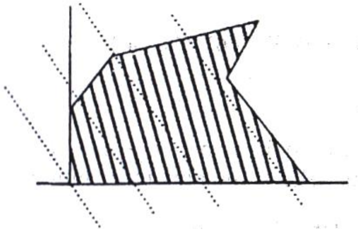
2. Nilai optimal dicapai oleh lebih dari 1 titik (optimal alternatif)

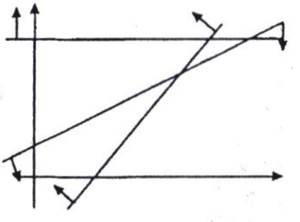


(i) daerah tertutup (ii) daerah terbuka

Gambar 2.9

3. Pemecahan optimal tanpa batas 4. Tidak ada daerah layak





Gambar 2.10

Penyelesaian tanpa batas

Gambar 2.11

Daerah layak ialah Sebuah himpunan kosong

2. Menggunakan titik sudut (corner point)

Sekelompok petani tranmigrasi mendapatkan 6 ha tanah yang dapat ditanami padi, jagung, dan palawija lain. Karena keterbatsan sumberdaya petani harus menentukan berapa bagian yang harus ditanami padi dan berapa yang harus ditanami jagung, sedangkan palawija lain ternyata tidak menguntungkan. Dalam satu masa tanam tenaga yang tersedia hanya 1590 jam-orang. Pupuk juga terbatas, tak lebih dari 480 kg., sedangkan air dan sumberdaya lainya dianggap cukup tersedia. Diketahui pula bahwa untuk menghasilkan 1 kuintal padi diperlukan 12 jam-orang tenaga dan 4 kg pupuk, untuk 1 kuintal jagung diperlukan 9 jam-orang tenaga dan 2 kg pupuk. Kondisi tanah memungkinkan menghasilakn 50 kuintal padi per ha dan 20 kunital jagung per ha. Pendapatan petani satu kuintal padi adalah 32.000 sedangkan satu kuintal jagung adalah RP 20.000, dan dianggap bahwa semua hasil tanamnya semual habis terjual. Masalah bagi petani ialah bagaimana rencana (program) produksi yang memaksimumkan pendapat total? Artinya, berapa ha tanah ditanmi padi dan berapa yang di tanami jagung.

Penyelesaian

Lahan yang tersedia 6 ha tanah

Jenis tanaman : padi dan jagung

Untuk satu masa tanam

Pupuk yang tersedia $\leq$ 480 kg

Tenaga yang tersedia : 1590 jam/ orang

1 kw padi : 12 jam/ orang dan 4 kg pupuk

1 kw jagung : 9 jam/ orang dan 2 kg pupuk

Hasil yang diperoleh :

50 kw padi/ ha (1 kw padi : 1/50 ha) atau 20 kw jagung/ ha (1 kw jagung : 1/20 ha)

Pendapatan : 1 kw padi : Rp. 32.000 dan 1 kw jagung : Rp. 20.000

Permasalahan : Memaksimumkan pendapatan petani?

Misalkan :

x : Jumlah/ hasil padi dalam kuintal

y : Jumlah/ hasil jagung dalam kuintal

Sumber	Per kwintal		Batas sumber	satuan
	padi	jagung		
Tanah	1/50= 0,02	1/20=0,05	6	Ha
Tenaga	12	9	1590	Jam-orang
Pupuk	4	2	480	Kg
pendapatan	32	20		Rp.1000

Pemodelan Matematika:

Maksimumkan $f(x, y) = 32x + 20y$

Dengan kendala :

$0{,}02x+0{,}05y \leq 6$ $\quad$ $2x + 5y \leq 600$

$12x+9y\leq 1590$ $\quad$ $4x + 3y\leq 530$

$4x+2y \leq 480$ $\quad$ $2x + y = 240$

$X \geq 0$

$y\geq 0$

Karena fungsi sasaran dan semua fungsi kendala berbentuk linear serta memuat kendala tak negatif maka masalah di atas termasuk MASALAH PROGRAM LINEAR.

Maksimumkan $f(x, y) = 32x + 20y$

kendala

$2x + 5y \leq 60$ ....(i)

$4x + 3y \leq 530$ ....(ii)

$2x + y \leq 240$ ....(iii)

$X,y \geq 0$

■ Menggambar fungsi-fungsi kendala sehingga diperoleh daerah penyelesaian (Daerah yang Memenuhi Kendala/ Wilayah kelayakan). Titik potong-titik potong dari ketidaksamaan fungsi kendalanya adalah :

- ☐ Untuk persamaan $2X + 5y = 600$ ….. (i), titik potong dengan sumbu- X_1 jika $y = 0 : 2X + 5.\ 0 = 600$ diperoleh $X = 300$ maka titik potong dengan sumbu-X adalah **(300,0)**.

Sedangkan titik potong dengan sumbu-y jika X = 2. 0 + 5y = 600 diperoleh y = 120 maka titik potong dengan sumbu-y adalah **(0,120)**.

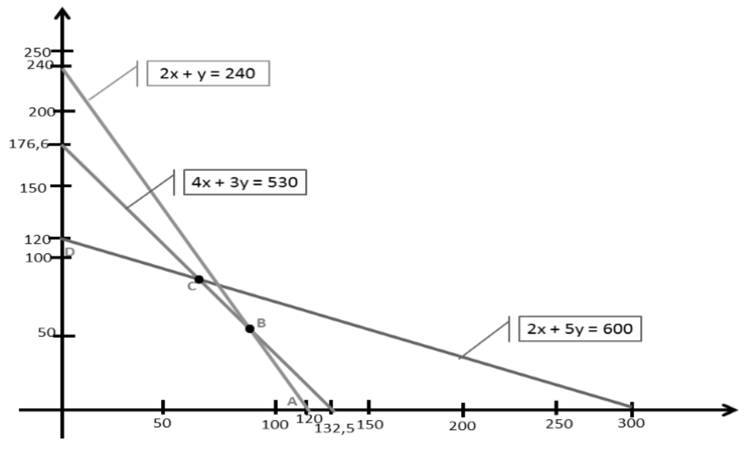
- Untuk persamaan 4X + 3y = 530 ....(ii), titik potong dengan sb-X jika jika y = 0 : 4x + 5. 0 = 530 diperoleh X = 176,6 maka titik potong dengan sumbu-X adalah **(132,5 ,0).**

  Sedangkan titik potong dengan sumbu-y jika X = 0 : 4.0 + 5y = 530 diperoleh y = 176,5 maka titik potong dengan sumbu-y adalah **(0, 176,5)**.

- Untuk persamaaan 2x + y= 240 ....(iii), titik potong dengan sumbu-X_1 jika y = 0 : $2X_1$ + 0 = 240 diperoleh X = 120 maka titik potong dengan sumbu-X adalah **(120,0)**.

  Sedangkan titik potong dengan sumbu-y jika X = 0 : 2. 0 + y = 240 diperoleh y = 240 maka titik potong dengan sb-y adalah **(0,240)**.

Table 1



Daerah Fisibel (Wilayah Kelayakan / Daerah yang Memenuhi Kendala (DMK)) adalah daerah yang merupakan irisan dari daerah yang memenuhi kendala :

$2x + 5y \leq 60$ ....(i)

$4x + 3y \leq 530$ ....(ii)

$2x + y \leq 240$ ....(iii)

$X, y \geq 0$

Jadi daerah yang memenuhi ke-5 daerah tersebut terletak di dalam daerah yang dibatasi oleh titik-titik **O(0,0)**, **A(120,0), D(0,120)**, titik **B** yaitu titik potong antara garis 4x + 3y =530 dan garis 2x + y = 240 , dan titik **C** adalah titik potong antara garis 2X + 5y = 600 dan garis 4X + 3y = 530

Adapun cara menghitung titik **B** dan **C** tersebut dengan menggunakan metode Eliminasi dan Substitusi sbb:

- Titik **B** perpotongan antara garis 4x + 3y =530 dan garis 2x + y = 240, dengan mengeliminasi X_1, dapat dihitung :

  4x + 3y =530 ....i)

  2x + y = 240 ……....iii) x 2

$$\begin{array}{rl} 4x + 3y &= 530 \\ 4x + 2y &= 480 \quad - \\ \hline y &= 50 \end{array} \rightarrow \mathbf{y= 50}$$

$4x + 2y = 480$

$4x + 2 .50= 480$

$4x + 100 = 480$

$4x = 480-100$

$x = 95$ → **X= 95** maka titik B adalah **(95,50)**

- Titik **C** perpotongan antara garis 2X + 5y = 600 dan garis 4X + 3y = 530 , dengan mengeliminasi X, dapat dihitung :

  2X + 5y = 600............i)

  4X + 3y = 530............ii)

$$\begin{array}{rl} 4x + 10y &= 1200 \\ 4x + 3y &= 530 \; - \\ \hline 7y &= 670 \\ y &= 95 \rightarrow \mathbf{y = 95} \end{array}$$

$$2x + 5y = 600$$

$$2x + 5.\,95 = 600$$

$$2x + 475 = 600$$

$$2x = 600 - 475$$

$$2x = 125$$

$$x = 62{,}5 \rightarrow \mathbf{X = 62{,}5}$$

  maka titik C adalah **(62,5 , 95)**

Daerah penyelesaian (Daerah yang Memenuhi Kendala/Wilayah Kelayakan) adalah daerah OABCD yang titik-titik sudutnya adalah : O(0,0), A(120,0), B(95,50), C(62,5,95), dan D(0,120).

Penyelesaian dari soal diatas adalah menghitung nilai fungsi sasaran (F = 32X + 20y) di setiap titik sudut-titik sudut Daerah yang Memenuhi Kendala, sehingga:

Titik O (0,0) → f (0,0) = 32.(0) + 20.(0) = 0,

Titik A (120,0) → f (120,0) = 32.(120) + 20.(0) = 3840

Titik B (95,50) → f (95,50) = 32.(95) + 20.(50) = 4040

Titik C (62,5 ,95) → f(62,5, 95) = 32.(0) + 20.(95) = 3900

Titik D (0,120) → f(0,120) = 32.(0) + 20.(120) = 2400

Fungsi Tujuan adalah mencari nilai maksimumnya sehingga nilai yang sesuai adalah :

Terletak pada titik C(95,50)

Dengan nilai fungsi tujuannya Rp. 4.040

Sehingga untuk memaksimalkan pendapatan total maka produksi 95 kwintal padi dan 50 kwintal jagung.

ini berati bahwa

Tanah yang di tanami Padi = 95 x 0,02 = 1,9 ha

Tanah yang di tanami Jagung = 50 X 0,05 = 2,5 ha

Sehingga pendapatan maksimum = 4,040

Dari segi kendala terlihat bahwa tanah masih tersisa 1,6 ha. Sedangkan pupuk dan tenaga habis terpakai (periksa bahwa titik optimum pada batas kendala tenaga dan pupuk) maka kendala pupuk dan tenaga di sebut kendala membatasi sedangkan kendala tanah tidak membatasi

C. METODE SIMPLEK MASALAH DUA VARIABEL

Penyelesaian persoalan tiga variabel pokok dengan cara grafik menampilkan hambatan menunjukan daerah layak yang memenuhi sistem pertidaksamaan pembatas/kendala, apalagi kalau terdapat persoalan dengan lebih dari 3 variabel pokok. Untuk itu diperlukan analisis secara aljabar yang salah satu cara tersebut dikenal dengan nama *metode simpleks (simplex method*) yang dikembangkan oleh George Dantzig dan telah digunakan secara meluas sekarang ini, termasuk penggunannya dengan bantuan jasa komputer.

Sekarang akan dipelajari analisis simpleks terhadap masalah dua variabel pokok yang diharapkan sebagai acuan untuk mempelajari metode simpleks dan penggunaan secara lebih luas di dalam Modul 3 sampai dengan 9. Perhatikan contoh masalah program linear yang dihadapi sebuh Firma yang memproduksi 2 macam almari (lihat bab 1).

Fungsi tujuan $z = 2x_1 + 4x_2$ Maks (1)

Pembatas $3x_1 + 4x_2 \leq 1700$ (2)

$2x_1 + 5x_2 \leq 1600$ (3)

$X_1, x_2 \geq 0$

Dengan menambahkan variabel $x_3 \geq 0$ di ruas kiri (2) dan $x_4 \geq 0$ di ruas kiri (3), sistem pertidaksamaan pembatas berubah menjadi sistem persamaan

$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1700$ (2_a)

$2x_1 + 5x_2 + x_4 = 1600$ (3_a)

Sistem persamaan pembatas ini terdiri atas m = 2 persamaan dan n= 4 variabel, sehingga kita mempunyai 6 pemecahan dasar yaitu

(pd1); $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1700$; $x_4 = 1600$ (L) *

(pd2); $x_1 = 0$; $x_3 = 0$; $x_2 = 425$; $x_4 = -525$ (TL)

(pd3); $x_1 = 0$; $x_4 = 0$; $x_2 = 320$; $x_3 = 420$ (L) *

(pd4); $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_1 = 566,7$; $x_4 = 466,6$ (L) *

(pd5); $x_2 = 0$; $x_4 = 0$; $x_1 = 800$; $x_3 = -700$ (TL)

(pd6); $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_1 = 300$; $x_2 = 200$ (L) *

Keterangan:

L = layak

TL = tidak layak

Di antara 6 penyelesaian dasar ini ada 4 pemecahan dasar yang memenuhi syarat pembatas di atas, yaitu nilai variabel non-negatif.

Analisis simpleks berawal dari banyak pemecahan dasar yang perlu dicari kemudian diteliti di antara penyelesaian dasar itu manakah pemecahan dasar yang layak dan sekaligus memberi nilai optimal bagi fungsi tujuan.

Keadaan awal ditunjukan dengan nilai variabel $x_3 = 1700$, $x_4 = 1600$, $x_1 = 0$, dan $x_2 = 0$ karena pada saat itu z =0.

Pertanyaan yang perlu dijawab ialah:

1. Di antara x_1 dan x_2, manakah yang pertama dipilih menjadi *variabel basis*?

   Jawaban atas pertanyaan itu ialah x_2 yang dipilih sebab pada saat $x_2 = 1$, $x_1 = 0$; diperoleh $z = 4$ sedangkan pada saat $x_1 = 1$, $x_2 = 0$; didapat z= 2. Jadi memilih x_2 lebih dulu menjadi basis akan lebih menguntungkan

2. Berapa besar penambahan x_2 dari nol? Dan x_3 atau x_4 yang harus dijadikan non-basis? Perhatikan persamaan (2a) dan (3a)

   Dari (2a) $x_1 = 0; x_3 = 0; x_2 = 425$

   (3a) $x_1 = 0; x_4 = 0; x_2 = 320$

   Kalau $x_2 = 425$; $x_1 = 0$ disubstitusikan ke (3a) maka x_4 negatif (kontradiksi dengan variabel non-negatif). Kalau $x_2 = 320$; $x_1 = 0$ didistribusikan ke (2a) maka x_3 positif yaiyu $x_3 = 1700 – 1280 = 420$ (memenuhi syarat non-negatif). Jadi yang akan menjadi variabel basis ialah x_2 dan x_3 sedangkan non basis adalah x_1 dan x_1

   Perlu dicatat $x_2 = (320,425)$; yang terpilih ialah $x_2 = 320$ (nilai terkecil).

   Pengertian memilih nilai minimum ini akan menjadi penting dalam analisis simpleks.

   Persamaan (3a) menjadi $x_2 = 320 - \frac{2}{5} x_1 - \frac{1}{5} x_1$ (3aa)

(2a) menjadi $x_3 = 1700 – 3x_1 -4x_2$

$$= 1700 -3x_1– 4(320 - \frac{2}{5} x_1 - \frac{1}{5} x_4)$$

$$= 420 - \frac{7}{5} x_1 + \frac{4}{5} x_4 \quad (2aa)$$

Sehingga di peroleh $x_2 = 320$; $x_3 = 420$, $x_1 = 0$; $x_4 = 0$

Apakah pemecahan ini telah memberi ilai optimal bagi z?

Jawabannya belum. Tentu saja persoalan yang dihadapi ialah menambah x_1 atau x_4 dari 0.

Bagaimana melakukannya? Jawabannya itu ialah mengulang prosedur seperti di atas, sebab langkah selanjutnya *adalah pengulangan murni* (iterasi).

$$X_2 + \frac{2}{5} x_1 + \frac{1}{5} x_4 = 320 \quad (3aa)$$

$$X_3 + \frac{7}{5} x_1 - \frac{4}{5} x_4 = 420 \quad (2aa)$$

$$Z= 2x_1 + 4 x_2 \ldots (1)$$

(3aa) ke (1); $z= 2x_1 + 4 (320 - \frac{2}{5} x_1 - \frac{1}{5} x_4)$ (1a)

Persamaan (1a) menunjukan x_1 menjadi basis dan $x_4 = 0$

$X_2 = 0$; $x_4 = 0$; $x_1 = 800$ dari (3aa)

$X_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_1 = 300$ dari (2aa)

Terpilih di antara $x_1 = (300,800)$ ialah $x_1 = 300$

Sehingga $x_2 = 320-120 = 200$;

$$X_1 = 300 - \frac{5}{7} x_3 + \frac{4}{7} x_4 \quad (2\ aaa)$$

$$X_2 = 320 - \frac{2}{5} (300 - \frac{5}{7} x_3 + \frac{4}{7} x_4)$$

$$= 200 + \frac{2}{7} x_3 - \frac{8}{35} x_4 \quad (3\ aaa)$$

$$Z = 2 (300 - \frac{5}{7} x_3 + \frac{4}{7} x_4) + 4 (200 + \frac{2}{7} x_3 - \frac{8}{35} x_4)$$

Nilai z tidak akan menjadi kecil lagi untuk tiap x_3 yang ditambahkan. Dengan demikian untuk $x_3 = 0$; $x_4 = 0$. $Z^* = 1400$ ialah nilai optimal yang dicapai untuk $x_1 = 300$ dan $x_2^* = 200$.

Analisis simoleks menghasilkan z = 1400 sebagai nilai optimal (maksimum) yang juga diperoleh melalui penggunaan matriks/vektor kolom sebagai operator.

Fungsi tujuan dan pembatas dijadikan sistem persamaan

$$Z - 2x_1 - 4x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 = 0$$

$$0.z + 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 0.x_4 = 1700$$

$$0.z + 2x_1 + 5x_2 + 0.x_3 + x_4 = 1600$$

Menjadi persamaan $0.z + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b$ … (*)

$a_0 = [1,0,0]$; $a_1 = [-2,3,2]$; $a_2 = [-4,4,5]$; $a_3 = [0,1,0]$; $a_4 = [0,0,1]$; $b = [0,1700,1600]$

Penyelesaian dasar awal $z = 0$; $x_3 = 1700$; $x_4 = 1600$

Sementara variabel non-basis $x_1 = 0$ dan $x_2 = 0$

Bagaimana meningkatkan nilai x_0 ?

1) Mencari variabel non-basis yang akan menjadi variabel basis.
2) Memilih variabel basis manakah yang akan menjadi variabel non- basis.

Karena koefisien x_2 dalam fungsi tujuan memberi imbalan positif lebih besar dari x_1 maka yang masuk menjadi variabel basis ialah x_2. Di antara variabel basis x_3 dan x_4 yang akan keluar basis ialah x_4. Mengapa?

$X_2 = \text{Minimum}\left(\frac{1700}{4}, \frac{1600}{5}\right) = (425,320)$; terpilih $x_2 = 320$

Angka 4 pada $\frac{1700}{4}$ dan 5 pada $\frac{1600}{5}$ diperoleh dari koefisien x_2

Sehingga yang keluar basis ialah x_4.

Dengan demikian $a_2 = [-4, 4, 5]$ akan menjadi $a_2 = [0,0,1]$

Perubahan ini mengakibatkan koefisien pada a_1, a_3, a_4, dan b juga berubah.

Dicari vektor kolom transformasi a_2 menjadi a^2 yang baru

$A_2 + 5t = a_2 \longrightarrow [-4,4,5] + [p, q, r] = [0,0,1]$

Angka 5 diperoleh koefisien x_2

$$T = [p, q, r] = \frac{1}{5}[4, -4, -4] ;$$

$$a_1 = [-2,3,2] + 2 \cdot \frac{1}{5}[4, -4, -4] = [-2,3,2] + \frac{2}{5}[4, -4,4]$$

$$= \frac{1}{5}[-2,7,2]$$

$$a_4 = [0,0,1] + \frac{1}{5}[4, -4, -4] = \frac{1}{5}[4, -4,1]$$

$$b = [0,1700,1600] + \frac{1600}{5}[4, -4, -4]$$

$$= [1280,420,320]$$

$a_3 = [0,1,0]$ dan $a_0 = [1,0,0]$ tetap

Jadi $z = 1280$; $x_2 = 320$; $x_3 = 420$

Jadi entri urutan 1 (baris ke-1) dari a_1 ialah $\left(-\frac{2}{5}\right)$ atau imbalan positif sehingga a_0 masih mungkin meningkat. Cara menentukan variabel basis manakah yang akan meninggalkan basis untuk digantikan oleh x_1 ialah pengulangan murni cara di atas.

Perhatikanlah $a_1 = \frac{1}{5}[-2,7,2]$; $b = [1280,420,320]$

$X_1 = \text{Min } (420 : \frac{7}{5}, 320 : \frac{2}{5}) = \text{Min } (300, 800) = 300$

Ini berarti x_3 keluar basis.

Dengan demikian $a_1 = \frac{1}{5}[-2,7,2]$ menjadi $[0,1,0]$. Perubahan ini mengakibatkan koefisien pada a_3, a_4 dan b juga berubah. Dicari vektor kolom transformasi yang merubah $a_1 = \frac{1}{5}[-2,7,2]$ menjadi

$a_1 = [0,1,0]$, yaitu: $\frac{1}{5}[-2,7,2] + \frac{7}{5}\,t = [0,1,0]$

$t = \frac{1}{7}[2,-2,2]$

sehingga $a_3 = [0,1,0] + \frac{1}{7}[2,-2,-2] = \frac{1}{7}[2{,}5,-2]$

$$a_4 = \frac{1}{5}[4,-4,1] - \frac{4}{35}[2,-2,-2]$$
$$= \frac{1}{7}[4,-4,3]$$

$b = [1280,420,320] + \frac{420}{7}[2,-2,-2] = [1400,300,200]$

Persamaan (*) menjadi

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} z + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} x_2 + \frac{1}{7}\begin{bmatrix}2\\5\\-2\end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix}4\\-4\\3\end{bmatrix}_4 = \begin{bmatrix}1400\\300\\200\end{bmatrix}$$

Z = 1.400; x_1 = 300; x_2 = 200 yang menyatakan nilai z = 1.400 ialah nilai maksimum.

Mungkin Anda masih belum memahami dengan jelas uraian di atas Oleh karena itu, ikutilah dengan seksama contoh berikut.

Contoh 2.9

Carilah nilai maksimum $T = 10x + 15y$

Dengan batsan $x + y \le 16$

$X + 2y \le 20$

$X, y \ge 0$

1. Dengan cara grafik (kegiatan belajar 1)

    Gambarlah garis $x + y = 16$

    Melalui A (16,0), b (0,16)

    Gambarlah garis $x + 2y = 20$

    Melalui C (20,0) D (0,10)

    Koordinat titik potong dua garis itu ialah P (12,4)

   Garis selidik yang melalui A menghasilkan T = 160

   Garis selidik yang melalui P (12,4) menghasilkan T = 120 + 60 = 180

   Garis selidik yang melalui D menghasilkan T = 150

   Jadi nilai T = 180 ialah nilai maksimum untuk x = 12, y = 2.

2. Dengan analisis simpleks

$Z = 10x + 15y + 0.s_1 + 0.S_2$

$X + y \leq 16 \rightarrow x + y + s_1 = 16$ ....(1) $s_1 \geq 0$

$X + 2y \leq 20 \rightarrow x + 2y + s_2 = 20$ ....(2) $s_2 \geq 0$

a. Keadaan awal $s_1 = 16$ dan $s_2 = 20$, $z = 0$

b. Dipilih y menjadi basis (mengapa?) sehingga s_1 atau s_2 akan keluar basis

   $y = \min\left(\frac{16}{1}, \frac{20}{2}\right) = \text{Min}\ (16, 10) = 10$

   jadi yang akan keluar bsis ialah s_2

   $y = 10 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}s_2 \ldots$ (2a)

   $s_1 = 16 - x - (10 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}s_2)$

   $= 6 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}s_2 \ldots$ (1a)

   $X = 0, y = 10; s_1 = 6; s_2 = 0$; jadi T = 150

Karena x masih memberi imbalan positif, memungkinkan nilai T meningkat maka terasi selanjutnya ialah x menjadi basis dengan memilih x sebagai berikut:

$Y = 0$, $s_2 = 0$ maka $x = 20$ … (2a)

$S_1 = 0$, $s_2 = 0$, maka $x = 12$ …(3a)

Dipilih $x = \min(20,12) = 12$

$X = 12 - 2s_1 + s_2$ … (1a)

$Y = 10 - \frac{1}{2}\, 912 - 2s_1 + s_2) - \frac{1}{2}\, s_2$ …… (2a)

$= 4 + s_1 - s_2$

$T = 10\,(12 - 2s_1 + s_2) + 15\,(4 + s_1 - s_2)$

$= 180 - 5s_1 - 5s_2$

S_1 dan s_2 adalah variabel penambah dengan koefisien pada fungsi tujuan adalah nol. Biarpun s_1 maupun s_2 masih memungkinkan T bertambah (secara teoritis) namun pada kenyataannya nilai T tidak bertambah malah memberi pelung x atau y keluar basis sehingga memberi dampak kurang tepat. Oleh karena itu, sampai tahapan ini kita dapat menyimpulkan nilai T = 180 ialah nilai optimal.

3. Penggunaan matriks/vektor kolom sebagai operator

   $T = 10\,x + 15\,y + 0\,s_1 + 0.s_2$ $\quad T - 10x - 15\,y + 0.s_1 + 0.$ $S_2 = 0$ (*)

   $X + y + s_1 + 0.s_2 = 16$

   $X + 2y + 0.s_1 + s_2 = 20$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} T + \begin{bmatrix}-10\\1\\1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}-15\\1\\2\end{bmatrix} y + \frac{1}{7}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} s_2 = \begin{bmatrix}0\\16\\20\end{bmatrix}$$

Atau $\underline{a_0}$ T + $\underline{a_1}$x + $\underline{a_2}$ y + $\underline{a_3}$ s_1 + $\underline{a_4}$ s_2 = $\underline{b}$ (**)

Catatan: untuk selanjutnya matriks/vektor kolom $a_{0,}$ a_1, dan seterusnya ditulis dengan notasi $\underline{a_0}$ = $[1{,}0{,}0]$; $\underline{a_1}$ = $[-10, 1, 1]$d dan seterusnya. Karena y memberi imbalan terbesar bila y = 1 dari pada x = 1 maka $\underline{a_2} = [-15, 1, 2]$ akan menjadi $[0, 0, 1]$, dengan demikian vektor operator $\underline{t}$ = $\frac{1}{2}[15, -1, -1]$ dan diikuti dengan s_2 menjadi non- basis dari keadaan awal x = 0; y = 0; s_1 = 16 dan s_2 = 20; T = 0

$\underline{a_0}$ tetap $[1, 0, 0]$

$\underline{a_1}$ menjadi $[-10, 1, 1] + \frac{1}{2}[12, -1, -1] = \frac{1}{2}[-5, 1, 1]$

$\underline{a_3}$ tetap $[0, 1, 0]$

$\underline{a_4}$ menjadi $[0, 0, 1] + \frac{1}{2}[15, -1, -1] = \frac{1}{2}[15, -1, 1]$

$\underline{b}$ menjadi $[0, 16, 20] + \frac{20}{2}[15, -1, -1] = [150, 6, 10]$

(**) menjadi

$[1, 0{,}0]$ T + $\frac{1}{2}[-5, 1, 1]$ X + $[0{,}0{,}1]$ Y + $[0{,}1{,}0]$$S_1$ + $\frac{1}{2}[15, -1{,}1]$

= (150, 6, 10) …. (***)

Dengan memperhatikan vektor kolom (koefisien x) maka T masih berpeluang naik/ meningkat:

X menjadi basis; x = Min (6 : $\frac{1}{2}$, 10 : $\frac{1}{2}$) = Min (12,20) = 12

$\underline{s_1}$ keluar basis; vektor $\underline{t}$ = $[5, 1, -1]$

$\underline{a_0}$ tetap

$\underline{a_1}$ menjadi $[0, 1, 0]$

$\underline{a_2}$ tetap $[0, 0, 1]$

$\underline{a_3}$ menjadi $[0, 1,0]$ + 1 $[5, 1, -1] = [5, 2, -1]$

$\underline{a_4}$ menjadi $\frac{1}{2}[15, -1, 1]$ - $\frac{1}{2}[5, 1, -1]$ = $[5, -1, 1]$

$\underline{b}$ menjadi $[150, 6, 10]$ + 6 $[5,1, -1]$ = $[180, 12, 4]$

Jadi T = 180; x = 12 ; y = 4

Tiga cara yang telah diuraikan di tas menghasilkan nilai T yang sama. Cara manakah yang Anda pilih? Silahkan sesuai dengan penilaian Anda terhadap persoalan program linear yang akan kita cari pemecahannya.

LATIHAN

1) Sebuah perusahaan industri mempunyai, berturut-turut 240 kg, 360 kg dan 180 kg bahan yaitu kayu, plastik dan baja. Perusahaan itu akan membuat dua macam produk, yaitu P dan Q yang berturut-turut memerlukan bahan-bahan (dalam kg) seperti data berikut.

Produk	Bahan yang diperlukan		
	Kayu	Plastik	Baja
P	1	3	2
Q	3	4	1

Keuntungan tiap produk P ialah Rp 40.000,00 dan tiap produk Q ialah Rp60.000,00

a. Rumuskan persoalan perusahaan ini ke dalam model matematika suatu program linear.

b. Gambarlah daerah hasil layak yang ditunjukan dengan pembatas
c. Gambarlah garis selidik melalui titik sudut dalam daerah hasil layak yang telah diperlihatkan dengan pembatas itu.
d. Carilah nilai maksimum fungsi tujuan.
e. Gunakan analisis simpleks untuk memperoleh nilai maksimum fungsi tujuan.
   1) Rumuskan secara lengkap persoalan program linear ini dengan memasukan variabel penambah s_1 dan s_2.
   2) Carilah semua penyelesaian dasar yang layak
   3) Sebutkan penyelesaian dasar yang layak
   4) Tentukanlah variabel pokok manakah yang dipilih sebagai variabel basis menggantikan s_1 atau s_2 keadaan awal.
   5) Variabel poko yang menjadi basis ialah ….
   6) Apakah nilai optimal (maksimum) fungsi tujuan sama dengan proses cara grafik di atas?
f. Gunakan notasi matriks/vektor untuk mencari nilai maksimum fungsi tujuan. Apakah hasil itu sama dengan cara pada (d) dan (e)?

2) a. $z = 4x_1 + 28x_2$ Maks

Pembatas $5x_1 + 3x_2 \leq 34$

$3x_1 + 5x_2 \leq 30$

$X_{1,} x_2 \geq 0$

a. $z= 14x_1 + 16x_2$ Maks

Pembatas $3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$$7x_1 + 5x_2 \leq 29$$
$$X_1, x_2 \geq 0$$

b. $z = 2x_1 + 5x_2$ Maks

untuk $x_1 + 2x_2 \leq 16$

$2x_1 + x_2 \leq 12$

$X_1, x_2 \geq 0$

c. $x = 2x_1 + 3x_2$ Maks

untuk $x_1 + x_2 \leq 2$

$4x_1 + 6x_2 \leq 9$

$X_1, x_2 \geq 0$

Carilah nilai maksimum tiap-tiap persoalan dengan menggunakan:

(1) cara grafik
(2) analisis simpleks
(3) analisis simpleks dengan bantuan matriks/vektor kolom.

3) Diketahui $z = 2x_1 + x_2$ Maks

Syarat $x_1 - x_2 \leq 10$

$2x_1 - x_2 \leq 10$

$X_1, x_2 \geq 0$

"Persoalan ini termasuk kategori penyelesaian tanpa batas". Silahkan Anda menguji kebenaran pernyaratan ini dengan lebih dahulu mencari pemecahan dengan (1) cara grafik, (2) cara simpleks prosedur biasa, dan (3) cara simpleks menggunakan notasi matriks/vektor.

4) Persoalan program linear berikut termasuk kategori "persoalan dengan penyelesaian tak terikat".

$Z = 6x_1 - 2x_2$ Maks

Untuk $2x_1 - x_2 \leq 2$

$X_1 \leq 4$

$X_1, x_2 \geq 0$

Gunakan (a) cara grafik; (b) cara simpleks; (c) cara simpleks dengan bantuan matriks/ vektor.

RANGKUMAN

Metode/ cara grafik ialah suatu cara penyelesaian masalah program linear berdasarkan pendekatan geometriks dengan tahap kegiatan sebagai berikut.

1. Terjemahkan persoalan yang dihadapi ke dalam model matematika sehingga jelas,

   Fungsi tujuan $z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ atau $z = \sum_{j=1}^{n} c_i \, x_j$. $j = 1,2,\ldots,n$; untuk persoalan dua variabel $j = 1,2$

   pembatas: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \leq b$, Maks; $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \geq b_1$ Min

   $I = 1,2, \ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$ x_i non-negatif

2. Kalau rumusan persoalan $z = c_1x_1 + c_2x_2$ Maksimum/Minimum

   Pembatas $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq$ atau $\geq b_1$

   $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq$ atau $\geq b_2$

   Gambarlah garis $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$; $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$ kemudian arsirlah daerah layak hasil sesuai dengan tanda pertidaksamaan. Gambarlah garis selidik yaitu garis yang sejajar garis $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ yang melalui titik sudut dalam daerah layak hasil. Substitusikan koordinat titik sudut yang dilalui oleh garis selidik terjauh dari 0 (0,0) untuk persoalan memaksimumkan atau terdekat kalau persoalan meminimumkan.

3) Kalau ternyata ada 3 variabel aktivitas dan terikat pada beberapa pembatas berbentuk pertidaksamaan linear maka daerah layak hasil terdapat di dalam ruang/permukaan bangunan ruang. Hal ini dimungkinkan sebab harus digambar bidang datar $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$ dan seterusnya untuk pembatas lainnya.

   Dengan bantuan pengertian matriks/vektor gambaran daerah peyelesaian dapat ditampilkan dengan gambar kerucut yang dibangun dengan vektor kolom koefisien pembatas

Selain cara grafik, suatu persoalan program linear dapat diselesaikan dengan cara simpleks (operasi aljabar), di sini diperkenalkan juga penggunaan matriks/ vektor kolom t sebagai operator untuk transmormasi vektor $\underline{a_0}$, $\underline{a_1}$, $\underline{a_2}$, … , $\underline{a_{n+m}}$ + $\underline{b}$; n ialah banyaknya variabel pokok; m ialah banyak persamaan dan banyak variabel penambah 9slack) bernilai non-negatif sebanyak (n-m):

Misalkan $z = c_1x_1 + c_2x_2$ Maks

Syarat $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = b_1$

$A_{21}x_1 + a_{22}x_2 + {}_x4 = b_1$

1. Penyelesaian awal $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = b_1$, $x_4 = b_2$
2. Dalam contoh ini diambil semua koefisien positif. Memilih variabel x_1 atau x_2 masuk menjadi basis dilihat dari nilai terbesar, karena dinilai memberi imbalan terbesar bila x_1

atau x_1 menjadi basis, yaitu dari nol menjadi satu, dua dan seterusnya.

Kemudian melihat baris (persamaan) manakah yang menjadi kunci dilihat perbandingan antara tiap entri b dengan entri bersesuaian pada a_j; variabel yang dipilih menjadi basis. Misalnya x_1 menjadi basis karena c_1 lebih besar dari c_2 dan pilihan berdasarkan.

$$X = \text{Min}\left(\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}\right)$$

Kalau $\frac{b_2}{a_{21}}$ minimum, maka x_4 menjadi variabel non-basis $x_4 = 0$, vektor kolom $\underline{t}$ dicari dari vektor kolom $\underline{a_1}$ menjadi [0,0,1]

$$\underline{t} = \left(\frac{c_1}{a_{21}}, \frac{-a_{11}}{a_{21}}, \frac{1-a_{21}}{a_{21}}\right)$$

Dalam hal ini a_{21} sebagai elemen (entri) kunci pada baris ke-2 atau persamaan ke-2 koefisien variabel x – 1

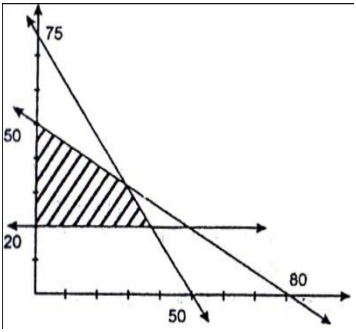
UJI KOMPETENSI

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Untuk nomor 1 sampai 3

Suatu perusahaan menghasilkan dua jenis barang yaitu A dan B. Dua jenis barang itu diproduksi dengan mesin M_1 dan M_2. Untuk memproduksi barang A diperlukan waktu kerja 2 jam pada mesin M_1 dan 4 jam mesin M_2. Untuk memproduksi barang B diperlukan waktu kerja 4 jam mesin M_1 dan 2 jam mesin M_2. Tiap jenis mesin, bekerja tidak lebih dari 24 jam sehari. Pekerja memperkirakan laba yang diperoleh dari tiap unit barang A sebesar Rp 30.000, dan dari tiap unit barang B sebesar Rp 50.000. Jika banyak barang jenis A adalah x & banyak barang jenis B adalah y maka …

1) Pembatas/kendala dari masalah ini ialah …
   A. $X + 2y \leq 24$
      $2x + y \leq 24$
      X dan y non- negatif
   B. $X + 2y \leq 12$
      $2x + y \leq 12$
      X dan y non-negatif
   C. $X + y \leq 24$
      $2x + 4y \leq 24$
   D. $X + y \leq 12$
      $2x + y \leq 12$
      X dan y non-negatif
2) Titik sudut dalam daerah pemecahan/ layak ialah …
   A. (6,0), (0,12),(12,0), (0,6)
   B. (12,0), (4,4), (0,12)
   C. (0,0), (6,0), (4,4), (0,6)
   D. (0,0), (6,0), (12,0), (4,4)
3) Nilai maksimum fungsi tujuan adalah …
   A. Z= 120.000
   B. Z= 240.000
   C. Z= 320.000
   D. Z= 480.000
4) Sistem pertidaksamaan yang penyelesaiannya ditampilkan dengan gambar di samping ini ialah …



A. $3x + 2y \leq 150,5x + 8y \leq 400,\ x \geq 0,\ y \geq 20$

B. $2x + 3y \leq 150,\ 5x + 8y \leq 400,\ x \geq 0, y \geq 20$

C. $3x + 2y \leq 350,\ 5x + 8y \leq 400,\ x \geq 0, y \geq 20$

D. $3x + 2y \leq 150,\ 5x + 8y \leq 400, x \geq 0, y \geq 0$

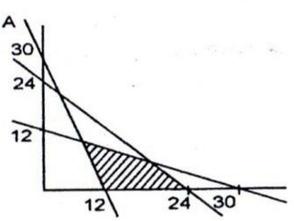
Untuk nomor 5,6, dan 7

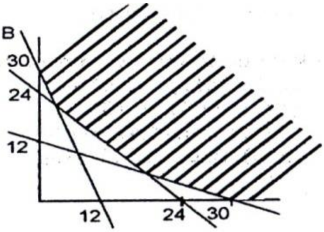
Susun tiap 1000 kg suatu campuran logam tampak dalam daftar

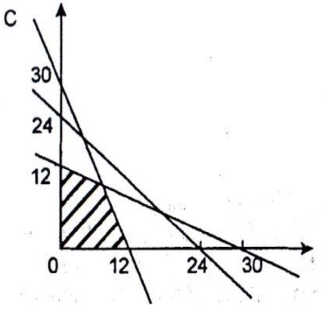
Jenis Campuran	Tembaga (kg)	Besi (kg)	Timah (kg)
I	500	300	200
II	200	300	500

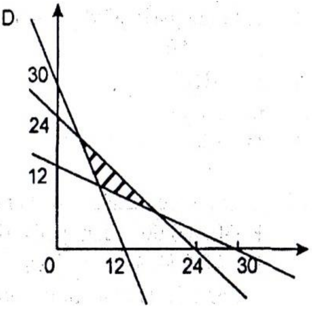
Dua jenis campuran itu merupakan sekurang-kurangnya 7,2 ton besi, 6 ton tembaga, dan 6 ton timah. Harga tiap satu ton jenis campuran I Rp4.000.000,00 dan jenis campuran II Rp2.000.000.

5) Daerah arsiran yang menunjukan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan pembatas ialah . . .









6) Titik kritis dalam daerah layak kalau akan membeli dua jenis campuran serendah-rendahnya ialah …
   A. (0,30), (20,4), (4,20) dan (30,0)
   B. (0,24), (20,4), (4,20) dan (30,0)
   C. (0,30), (20,4), (4,12) dan (30,0)
   D. (24,0), (20,4), (4,24) dan (0,30)
7) Harga paling rendah apabila membeli dua jenis campuran itu ialah …
   A. Rp48.000.000
   B. Rp56.000.000
   C. Rp60.000.000
   D. Rp64.000.000

Untuk nomor 8 dan 9

Suatu perusahaan bagunan merencanakan membangun rumah untuk 540 orang. Banyak rumah yang akan dibangun tidak lebih dari 120 buah terdiri atas 2 tipe, untuk disewakan dengan biaya sewa tiap tahun; Tipe A untuk 4 orang, biaya sewa per tahun Rp 1.600.000,00 dan tipe B untuk 6 orang, biaya sewa tiap tahun Rp2.000.000,00

8) Banyak rumah tipe B adalah x dan rumah tipe A adalah y. Tiga pasangan berurutan (x,y) yang paling menguntungkan untuk mengoptimalkan fungsi tujuan adalah …
   A. (90,0), (30,90) dan (0,120)
   B. (120,0), (90,30) dan (0,90)
   C. (135,0), (90,30) dan (0,120)
   D. (120,0), (30,90) dan (0,90)
9) Gradien garis selidik ialah …
   A. -1,50
   B. -1,25
   C. -0,8
   D. -0,5
10) Seseorang pedagang sepeda hendak membeli 2 jenis sepeda, jenis I seharga Rp30.000,00 dan jenis II seharga Rp 40.000. Modal yang tersedia Rp 840.000,00 dan daya tampung toko tak lebih dari 25 buah sepeda. Sepeda jenis I memberi keuntungan sebesar Rp 12.500,00 dan sepeda jenis II sebesar Rp 13.000,00 Berapa sepeda masing-masing jenis itu harus dibeli agar memperoleh keuntungan maksimal?
   A. Banyak sepeda jenis I, 9 buah
      Banyak sepeda jenis II, 16 buah
   B. Banyak sepeda jenis I, 13 buah
      Banyak sepeda jenis II, 12 buah
   C. Banyak sepeda jenis I, 10 buah

Banyak sepeda jenis II, 15 buah

D. Banyak sepeda jenis 1, 16 buah

Banyak sepeda jenis II, 9 buah

Untuk nomor 11 sampai dengan 13.

Perhatikan persoalan PL

Maksimum $z = 4x_1 + 6x_2$

Syarat $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$

$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 15$

X_j non-negatif, $j = 1, 2, 3, 4$

Variabel penembah (slack) ialah x_3 dan x_4

11) Setelah penyelesaian dasar awal di sini x_1 dan x_2 non-basis maka variabel basis pada pemecahan dasar kedua adalah ….

A. X_2 dan x_3

B. X_2 dan x_4

C. X_1 dan x_3

D. X_1 dan x_4

12) Pasangan berurutan (titik sudut) yang memungkinkan z mencapai maksimum ialah ….

A. (3,0), (0,4) dan (3,4)

B. (0,4), (3,0) dan (6,0)

C. (3,0), (0,4) dan (1,2)

D. (0,4), (3,0) dan (2,3)

13) Nilai maksimum z ialah ….

A. $\frac{242}{11}$

B. $\frac{246}{11}$

C. $\frac{264}{11}$

D. $\frac{286}{11}$

Untuk nomor 14 sampai dengan17

Perhatikan PL Maksimumkan $z = 2x_1 + 5x_2$

Syarat $x_1 + 2x_2 + x_3 = 16$

$2x_1 + x_2 + x_4 = 12$

X_3 dan x_4 ialah variabel penambahan (slack) yang non-negatif

14) Kalau Anda menggunakan cara grafik, maka gradien garis selidik ialah ….

A. -1,5

B. -0,4

C. 0,4

D. 1,5

15) Pada saat x_2 dan x_4 menjadi variabel basis, kalimat matematika (persamaan) untuk menunjukan x_4 ialah …

A. $X_4 = 4 - \frac{1}{2} x_1 + \frac{3}{2} \quad x_3$

B. $X_4 = 4 - \frac{1}{2} x_1 + \frac{3}{2} x_3$

C. $X_4 = 4 - \frac{3}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_3$

D. $X_4 = 4 - \frac{3}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_3$

16) X_1 yang masuk sebagai basis dipilih dari ….

A. Min (8,12)

B. Min $(16, \frac{8}{3})$

C. Min $(\frac{16}{3}, 8)$

D. Min $(\frac{20}{3}, \frac{8}{3})$

17) Nilai maksimum x ialah ….

A. $\frac{80}{3}$

B. $\frac{116}{3}$

C. $\frac{126}{3}$

D. $\frac{180}{3}$

Untuk nomor 18 sampai dengan 10

Persoalan PL Memaksimumkan $z = 3x_1 + 6x_2$

Syarat $3x_1 + x_2 + x_3 = 12$

$X_1 + 3x_2 + x_4 = 12$

X_j non-negatif, x_3 dan x_4 variabel slack

$J = 1, 2, 3, 4$

Menjadi $\underline{a_0}\, x_0 + \underline{a_2}\, x_2 + \underline{a_3}\, x_3 + \underline{a_4}\, x_4 = \underline{b}$

$X_0 = z$, bektor kolom $\underline{a_1}$, $\underline{a_2}$, $\underline{a_3}$, dan $\underline{a_4}$ ialah konstanta sesuai dengan variabel x_1, x_2, x_3, dan x_4

18) Vektor kolom $\underline{t}$ = [t_1, t_2, t_3] untuk mengubah $\underline{a_2}$ agar x_2 menjadi basis ialah ….

A. $\frac{1}{3}$ [6, -1, -2]

B. $\frac{1}{3}$ [6, 1, 2]

C. [-6, 1, 2]

D. [0, 0, 1]

19) Vektor kolom $\underline{b}$ pada saat x_2 menjadi basis menggantikan x_4 ialah ….

A. (24, 4, 8)

B. (24, 8, 4)

C. (48, 8, 4)

D. (96, 4, 8)

20) Vektor kolom $\underline{t}$ untuk mengubah $\underline{a_1}$agar x_1 dan x_2 menjadi variabel basis ialah ….

A. [0, 1, 0]

B. $\frac{1}{8}$ [-3, -5, -1]

C. $\frac{1}{8}$ [3, 5, -1]

D. $\frac{1}{8}$[3, -5, -1]

BAB III

METODE SIMPLEKS

A. PENDAHULUAN

Salah satu teknik penentuan solusi optimal yang digunakan dalam pemrograman linier adalah metode simpleks. Metode simplek Merupakan metode yang umum digunakan untuk menyelesaikan seluruh problem program linier, baik yang melibatkan dua variabel keputusan maupun lebih dari dua variabel keputusan. Metode simpleks pertama kali diperkenalkan oleh George B. Dantzig pada tahun 1947 dan telah diperbaiki oleh beberapa ahli lain. Metode penyelesaian dari metode simpleks ini melalui perhitungan ulang (*iteration*) dimana langkah-langkah perhitungan yang sama diulang-ulang sebelum solusi optimal diperoleh. Penentuan solusi optimal menggunakan metode simpleks didasarkan pada teknik eleminasi Gauss Jordan. Penentuan solusi optimal dilakukan dengan memeriksa titik ekstrim satu per satu dengan cara perhitungan iteratif. Sehingga penentuan solusi optimal dengan simpleks dilakukan tahap demi tahap yang disebut dengan iterasi. Iterasi ke-i hanya tergantung dari iterasi sebelumnya (i-1).

Ada beberapa istilah yang sangat sering digunakan dalam metode simpleks, diantaranya :

1. **Iterasi** adalah tahapan perhitungan dimana nilai dalam perhitungan itu tergantung dari nilai tabel sebelumnya.

2. **Variabel non basis** adalah variabel yang nilainya diatur menjadi nol pada sembarang iterasi. Dalam terminologi umum, jumlah variabel non basis selalu sama dengan derajat bebas dalam sistem persamaan.
3. **Variabel basis** merupakan variabel yang nilainya bukan nol pada sembarang iterasi. Pada solusi awal, variabel basis merupakan variabel slack (jika fungsi kendala merupakan pertidaksamaan $\leq$) atau variabel buatan (jika fungsi kendala menggunakan pertidaksamaan $\geq$ atau =). Secara umum, jumlah variabel basis selalu sama dengan jumlah fungsi pembatas (tanpa fungsi non negatif).
4. **Solusi atau nilai kanan** merupakan nilai sumber daya pembatas yang masih tersedia. Pada solusi awal, nilai kanan atau solusi sama dengan jumlah sumber daya pembatas awal yang ada, karena aktivitas belum dilaksanakan.
5. **Variabel slack** adalah variabel yang ditambahkan ke model matematik kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan $\leq$ menjadi persamaan (=). Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inisialisasi. Pada solusi awal, variabel slack akan berfungsi sebagai variabel basis.
6. **Variabel surplus** adalah variabel yang dikurangkan dari model matematik kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan $\geq$ menjadi persamaan (=). Penambahan ini terjadi pada tahap inisialisasi. Pada solusi awal, variabel surplus tidak dapat berfungsi sebagai variabel basis.

7. **Variabel buatan** adalah variabel yang ditambahkan ke model matematik kendala dengan bentuk ≥ atau = untuk difungsikan sebagai variabel basis awal. Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inisialisasi. Variabel ini harus bernilai 0 pada solusi optimal, karena kenyataannya variabel ini tidak ada. Variabel hanya ada di atas kertas.
8. **Kolom pivot (kolom kerja)** adalah kolom yang memuat variabel masuk. Koefisien pada kolom ini akn menjadi pembagi nilai kanan untuk menentukan baris pivot (baris kerja).
9. **Baris pivot (baris kerja)** adalah salah satu baris dari antara variabel basis yang memuat variabel keluar.
10. **Elemen pivot (elemen kerja)** adalah elemen yang terletak pada perpotongan kolom dan baris pivot. Elemen pivot akan menjadi dasar perhitungan untuk tabel simpleks berikutnya.
11. **Variabel masuk** adalah variabel yang terpilih untuk menjadi variabel basis pada iterasi berikutnya. Variabel masuk dipilih satu dari antara variabel non basis pada setiap iterasi. Variabel ini pada iterasi berikutnya akan bernilai positif.
12. **Variabel keluar** adalah variabel yang keluar dari variabel basis pada iterasi berikutnya dan digantikan oleh variabel masuk. Variabel keluar dipilih satu dari antara variabel basis pada setiap iterasi. Variabel ini pada iterasi berikutnya akan bernilai nol.

Hal yang perlu diperhatikan adalah Model program linier harus dirubah dulu kedalam suatu bentuk umum yang dinamakan ”bentuk baku” (*standard form*).

B. METODE SIMPLEKS BAKU

Ciri-ciri dari bentuk baku model program linier:

1. Semua fungsi kendala/pembatas berupa persamaan dengan sisi kanan non-negatif.
2. Semua variabel keputusan non-negatif.
3. Fungsi tujuan dapat memaksimumkan maupun meminimumkan.

Sebelum melakukan perhitungan iteratif untuk menentukan solusi optimal, pertama sekali bentuk umum pemrograman linier dirubah ke dalam bentuk baku terlebih dahulu. Bentuk baku dalam metode simpleks tidak hanya mengubah persamaan kendala ke dalam bentuk sama dengan, tetapi setiap fungsi kendala harus diwakili oleh satu variabel basis awal. Variabel basis awal menunjukkan status sumber daya pada kondisi sebelum ada aktivitas yang dilakukan. Dengan kata lain, variabel keputusan semuanya masih bernilai nol. Dengan demikian, meskipun fungsi kendala pada bentuk umum pemrograman linier sudah dalam bentuk persamaan, fungsi kendala tersebut masih harus tetap berubah.

Ada beberapa hal yang harus diperhatikan dalam membuat bentuk baku, yaitu :

1. Fungsi kendala dengan pertidaksamaan $\leq$ dalam bentuk umum, dirubah menjadi persamaan (=) dengan menambahkan satu variabel slack.
2. Fungsi kendala dengan pertidaksamaan $\geq$ dalam bentuk umum, dirubah menjadi persamaan (=) dengan mengurangkan satu variabel surplus.

3. Fungsi kendala dengan persamaan dalam bentuk umum, ditambahkan satu artificial variabel (variabel buatan).

Perlu diperhatikan juga bahwa metode simpleks hanya bisa dipakai (diaplikasikan) pada bentuk standar, sehingga kalau tidak dalam bentuk standar harus ditransformasikan dulu menjadi bentuk standar.

Untuk memudahkan melakukan transformasi ke bentuk standar, beberapa hal yang perlu diperhatikan :

Fungsi Pembatas

- Suatu fungsi pembatas yang mempunyai tanda $\leq$ diubah menjadi suatu bentuk persamaan (bentuk standar) dengan cara menambahkan suatu variabel baru yang dinamakan *slack variable* .
- Banyaknya slack variabel bergantung pada fungsi pembatas.

Fungsi Tujuan

- Dengan adanya *slack variable* pada fungsi pembatas, maka fungsi tujuan juga harus disesuaikan dengan memasukkan unsur *slack variable* ini.
- Karena *slack variable* tidak mempunyai kontribusi apa-apa terhadap fungsi tujuan, maka konstanta untuk *slack variable* tersebut dituliskan nol.

Bentuk program linear.

Fungsi Tujuan : Maksimumkan

$F = C_1X_1+C_2X_2+ \ldots\ldots +C_nX_n$

Fungsi Pembatas :

$$a_{11}X_{11} + a_{12}X_{12} + \ldots + a_{1n}X_n \leq b_1$$

$$a_{21}X_{21} + a_{22}X_{22} + \ldots + a_{2n}X_n \leq b_2$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots.. \qquad \ldots\ldots \quad \ldots.. \quad \ldots..$$

$$a_{m1}X_{m1} + a_{m2}X_{m2} + \ldots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

Bentuk program linear di atas dirubah menjadi bentuk standar metode simplek berikut:

Bentuk standar Metode Simpleks.

Fungsi Tujuan : Maksimumkan

$$Z - C_1X_1 - C_2X_2 - \ldots\ldots - C_nX_n - 0S_1 - 0S_2 - \ldots - 0S_n = NK$$

Fungsi Pembatas :

$$a_{11}X_{11} + a_{12}X_{12} + \ldots + a_{1n}X_n + S_1 + 0S_2 + \ldots + 0S_n = b_1$$

$$a_{21}X_{21} + a_{22}X_{22} + \ldots + a_{2n}X_n + 0S_1 + 1S_2 + \ldots + 0S_n = b_2$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots.. \qquad \ldots\ldots \quad \ldots.. \quad \ldots.. \quad \ldots. \quad \ldots..= \ldots$$

$$a_{m1}X_{m1} + a_{m2}X_{m2} + \ldots + a_{mn}X_n + S_1 + 0S_2 + \ldots + 1S_n = b_m$$

Var. Kegiatan Slack Var

Perhatikan pula kasus berikut ini :

Maksimumkan $z = 2x_1 + 3x_2$

Kendala :

$10\ x_1 + 5\ x_2 \leq 600$

$6\ x_1 + 20\ x_2 \leq 600$

$8\ x_1 + 15\ x_2 \leq 600$

$x_1, x_2 \geq$

Bentuk di atas juga merupakan bentuk umum. Perubahan ke dalam bentuk baku hanya membutuhkan variabel slack, karena semua fungsi kendala menggunakan bentuk pertidaksamaan $\leq$ dalam bentuk umumnya. Maka bentuk bakunya adalah sebagai berikut :

Maksimumkan $z = 2x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

Kendala :

$10 x_1 + 5 x_2 + s_1 = 600$

$6 x_1 + 20 x_2 + s_2 = 600$

$8 x_1 + 15 x_2 + s_3 = 600$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

s_1 , s_2 , s_3 merupakan variable slack.

Perhatikan kasus A berikut :

Fungsi tujuan : minimumkan $z = 2 x_1 + 5.5 x_2$

Kendala :

$x_1 + x_2 = 90$

$0.001 x_1 + 0.002 x_2 \leq 0.9$

$0.09 x_1 + 0.6 x_2 \geq 27$

$0.02 x_1 + 0.06 x_2 \leq 4.5$

$x_1, x_2 \geq 0$

Bentuk di atas adalah bentuk umum pemrograman liniernya. Kedalam bentuk baku, model matematik tersebut akan berubah menjadi :

Fungsi tujuan : minimumkan $z = 2 x_1 + 5.5 x_2$

Kendala :

$x_1 + x_2 + s_1 = 90$

$0.001 x_1 + 0.002 x_2 + s_2 = 0.9$

$0.09 x_1 + 0.6 x_2 - s_3 + s_4 = 27$

$0.02 x_1 + 0.06 x_2 + s_5 = 4.5$

$x_1, x_2 , s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0$

Fungsi kendala pertama mendapatkan variable buatan (s_1), karena bentuk umumnya sudah menggunakan bentuk persamaan. Fungsi kendala kedua dan keempat mendapatkan variabel slack (s_2 dan s_5) karena bentuk umumnya menggunakan pertidaksamaan $\leq$, sedangkan fungsi kendala ketiga mendapatkan variabel surplus (s_3) dan variabel buatan (s_4) karena bentuk umumnya menggunakan pertidaksamaan $\geq$.

Pembentukan Tabel Simpleks

1. Setelah fungsi batasan dirubah ke dalam bentuk persamaan (bentuk standar), maka untuk menyelesaikan masalah program linier dengan metode simpleks menggunakan suatu kerangka tabel yang disebut dengan tabel simpleks.
2. Tabel ini mengatur model ke dalam suatu bentuk yang memungkinkan untuk penerapan penghitungan matematis menjadi lebih mudah
3. Dalam perhitungan iterative, akan bekerja menggunakan tabel. Bentuk baku yang sudah diperoleh, harus dibuat ke dalam bentuk tabel.
4. Semua variabel yang bukan variabel basis mempunyai solusi (nilai kanan) sama dengan nol dan koefisien variabel basis pada baris tujuan harus sama dengan 0. Oleh karena itu kita harus membedakan pembentukan tabel awal berdasarkan variabel basis awal.

Tabel simplek

Var. Dasar	Z	X_1	X_2	. . . .	X_n	S_1	S_2	. . . .	S_n	NK
Z	1	$-C_1$	$-C_2$	. . . .	$-C_n$	0	0	0	0	0

Var. Dasar	Z	X_1	X_2	. . . .	X_n	S_1	S_2	. . . .	S_n	NK
S_1	0	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}	1	0	0	0	b_1
S_2	0	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}	0	1	0	0	b_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
S_n	0	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mn}	0	0	0	1	b_m

LANGKAH-LANGKAH PENYELESAIAN

Langkah-langkah penyelesaian adalah sebagai berikut :

1. Periksa apakah tabel layak atau tidak. Kelayakan tabel simpleks dilihat dari solusi (nilai kanan). Jika solusi ada yang bernilai negatif, maka tabel tidak layak. Tabel yang tidak layak tidak dapat diteruskan untuk dioptimalkan.
2. Tentukan kolom kunci. Penentuan kolom kunci dilihat dari koefisien fungsi tujuan (nilai di sebelah kanan baris z) dan tergantung dari bentuk tujuan. Jika tujuan maksimisasi, maka kolom kunci adalah kolom dengan koefisien paling negatif. Jika tujuan minimisasi , maka kolom kunci adalah kolom dengan koefisien positif terbesar. Jika kolom kunci ditandai dan ditarik ke atas, maka kita akan mendapatkan variabel keluar. Jika nilai paling negatif (untuk tujuan maksimisasi) atau positif terbesar (untuk tujuan minimisasi) lebih dari satu, pilih salah satu secara sembarang.

3. Tentukan baris kunci. Baris kunci ditentukan setelah membagi nilai solusi (nilai kanan) dengan nilai kolom kunci yang bersesuaian (nilai yang terletak dalam satu baris). Dalam hal ini, nilai negatif dan 0 pada kolom kunci tidak diperhatikan, artinya tidak ikut menjadi pembagi. Baris kunci adalah baris dengan rasio pembagian terkecil. Jika baris kunci ditandai dan ditarik ke kiri, maka kita akan mendapatkan variabel keluar. Jika rasio pembagian terkecil lebih dari satu, pilih salah sau secara sembarang.
4. Tentukan elemen kunci. Elemen kunci merupakan nilai yang terletak pada perpotongan kolom dan baris kunci.
5. Bentuk tabel simpleks baru. Tabel simpleks baru dibentuk dengan pertama sekali menghitung nilai baris kunci baru. Baris kunci baru adalah baris kunci lama dibagi dengan elemen kunci. Baris baru lainnya merupakan pengurangan nilai kolom kunci baris yang bersangkutan dikali baris kunci baru dalam satu kolom terhadap baris lamanya yang terletak pada kolom tersebut.
6. Periksa apakah tabel sudah optimal. Keoptimalan tabel dilihat dari koefisien fungsi tujuan (nilai pada baris z) dan tergantung dari bentuk tujuan. Untuk tujuan maksimisasi, tabel sudah optimal jika semua nilai pada baris z sudah positif atau 0. Pada tujuan minimisasi, tabel sudah optimal jika semua nilai pada baris z sudah negatif atau 0. Jika belum, kembali ke langkah no. 2 , jika sudah optimal baca solusi optimalnya

Rumus:

Menentukan baris kunci :

$$Nilai\ rasio = \frac{NK\ Fungsi\ Pembatas}{Nilai\ kolom\ kunci\ fungsi\ pembatas}$$

$$baris\ kunci = nilai\ rasio\ terkecil\ (positif)$$

Perubahan-perubahan nilai baris

$$Nilai\ baris\ kunci\ baru = \frac{Nilai\ baris\ kunci\ lama}{angka\ kunci}$$

Nilai baris yang lain = Baris lama – ((Nilai baris kunci baru) x angka kolom kunci baris ybs).

Contoh

Model Program Linear

1. Fungsi Tujuan :

   Maksimumkan : $Z=8X_1 + 6X_2$

   (Dlm Rp1000)

   Fungsi Pembatas :

   Bahan A : $4X_1 + 2X_2 \leq 60$

   Bahan B : $2X_1 + 4X_2 \leq 48$

   $X_1, X_2 \geq 0$

Penyelesaian

Model Simpleks :

1. Fungsi Tujuan : Maksimumkan

   $Z - 8X_1 - 6X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$

2. Fungsi Pembatas :

   $4X_1+2X_2+ S_1+ 0S_2 = 60$

   $2X_1+4X_2+0S_1+ 1S_2 = 48$

   $X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$

Langkah-langkah penyelesaian

1. Iterasi 0 =Masukkan nilai di atas ke tabel simplek

Tabel Simplek iterasi 0

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	NK
Z	-8	-6	0	0	0
S_1	4	2	1	0	60
S_2	2	4	0	1	48

2. Iterasi 1

   a. Menentukan kolom kunci

   Kolom kunci adalah kolom yang mempunyai koefisien fungsi tujuan yang bernilai negatif terbesar.

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	NK
Z	-8	-6	0	0	0
S_1	4	2	1	0	60
S_2	2	4	0	1	48

   b. Menentukan baris kunci

$$Nilai\ rasio = \frac{NK\ Fungsi\ Pembatas}{Nilai\ kolom\ kunci\ fungsi\ pembatas}$$

$$baris\ kunci = nilai\ rasio\ terkecil\ (positif)$$

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Rasio
Z	-8	-6	0	0	0	-
S_1	4	2	1	0	60	60:4= 15
S_2	2	4	0	1	48	48: 2 =28

Posotif terkecil

Angka kunci

c. Perubahan-perubahan nilai baris

$$Nilai\ baris\ kunci\ baru = \frac{Nilai\ baris\ kunci\ lama}{angka\ kunci}$$

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Rasio
Z						
X_1	1	½	¼	0	15	
S_2						

Nilai baris yang lain = Baris lama – ((Nilai baris kunci baru) x angka kolom kunci baris ybs)

Baris pertama (Z)

[-8 -6 0 0 0]

(-8) [**1** **1/2** 1/4 **0** **15]** (-)

Nilai baru = [0 -2 2 0 120]

Baris ke-3 (batasan 2)

		[2	4	0	1	48]	
	(2)	[**1**	**1/2**	1/4	**0**	**15]**	(-)
Nilai baru	=	[0	3	-1/2	1	18]	

Maka didapat hasil

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Rasio
Z	0	-2	2	0	120	
X_1	1	½	¼	0	15	
S_2	0	3	-1/2	1	18]	

3. Ulangi langkah 2

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Rasio
Z	0	-2	2	0	120	
X_1	1	½	¼	0	15	15:1/2=100
S_2	0	3	-1/2	1	18]	18: 3 =6

Hasil perhitungan adalah

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	NK
Z	0	0	5/3	2/3	132
X_1	1	0	1/3	- 1/6	12
X_2	0	1	-	1/3	6

			1/6		

Pada iterasi-2 terlihat bahwa koefisien fungsi tujuan sudah tidak ada lagi yang mempunyai nilai negatif, proses peru-bahan selesai dan ini menunjukkan penyelesaian persoalan linear dengan metode simpleks sudah mencapai optimum dengan hasil sbb :

$X_1 = 12$ dan $X_2 = 6$

dengan $Z_{makasimum}$ = Rp 132.000.-

Contoh

Fungsi Tujuan

Maksimum $z = 8x_1 + 9x_2 + 4x_3$

Kendala :

$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 3$

$7x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 8$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Penyelesaian :

Bentuk bakunya adalah :

Maksimum $z = 8x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$ atau

$z - 8x_1 - 9x_2 - 4x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 0$

Kendala :

$x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 2$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + s_2 = 3$

$7x_1 + 6x_2 + 2x_3 + s_3 = 8$

$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Solusi / table awal simpleks :

VB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	NK	Rasio
Z	-8	-9	-4	0	0	0	0	
S_1	1	1	2	1	0	0	2	
S_2	2	3	4	0	1	0	3	
S_3	7	6	2	0	0	1	8	

Karena nilai negative terbesar ada pada kolom X_2, maka kolom X_2 adalah kolom kunci dan X_2 adalah variabel masuk. Rasio pembagian nilai kanan dengan kolom kunci terkecil adalah 1 bersesuaian dengan baris s_2, maka baris s_2 adalah baris kunci dan s_2 adalah varisbel keluar. Elemen pivot adalah 3.

VB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	NK	Rasio
Z	-8	-9	-4	0	0	0	0	
S_1	1	1	2	1	0	0	2	2
S_2	2	3	4	0	1	0	3	1
S_3	7	6	2	0	0	1	8	8/6

Iterasi 1

Nilai pertama adalah nilai baris kunci baru (baris x_2). Semua nilai pada baris s_2 pada tabel solusi awal dibagi dengan 3 (angka kunci) .

VB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	NK	Rasio
Z								
S_1								
x_2	2/3	1	4/3	0	1/3	0	1	
S_3								

Perhitungan nilai barisnya :

Baris z :

	-8	-9	-4	0	0	0	0
-9 (	2/3	1	4/3	0	1/3	0	1) -
	-2	0	8	0	3	0	9

Baris s_1 :

	1	1	2	1	0	0	2
1 (	2/3	1	4/3	0	1/3	0	1) -
	1/3	0	2/3	1	-1/3	0	1

Baris s3 :

	7	6	2	0	0	1	8
6 (	2/3	1	4/3	0	1/3	0	1) -
	3	0	-6	0	-2	1	2

Maka tabel iterasi 1 ditunjukkan tabel di bawah. Selanjutnya kita periksa apakah tabel sudah optimal atau belum. Karena nilai baris z di bawah variabel x_1 masih negatif, maka tabel belum optimal. Kolom dan baris pivotnya ditandai pada tabel di bawah ini :

VB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	NK	Rasio
Z	-2	0	8	0	3	0	9	-
S_1	1/3	0	2/3	1	-1/3	0	1	3
X_2	2/3	1	4/3	0	1/3	0	1	3/2
S_3	3	0	-6	0	-2	1	2	2/3

Variabel masuk dengan demikian adalah X_1 dan variabel keluar adalah S_3 . Hasil perhitungan iterasi ke 2 adalah sebagai berikut :

Iterasi 2 :

VB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	NK	Rasio
Z	0	0	4	0	5/3	2/3	31/3	
S_1	0	0	4/3	1	-1/9	-1/9	7/9	
X_2	0	1	8/3	0	7/9	-2/9	5/9	
X_1	1	0	-2	0	-2/3	1/3	2/3	

Tabel sudah optimal, sehingga perhitungan iterasi dihentikan !

Perhitungan dalam simpleks menuntut ketelitian tinggi, khususnya jika angka yang digunakan adalah pecahan. Pembulatan harus diperhatikan dengan baik. Disarankan jangan menggunakan bentuk bilangan desimal, akan lebih teliti jika menggunakan bilangan pecahan. Pembulatan dapat menyebabkan iterasi lebih panjang atau bahkan tidak selesai karena ketidaktelitian dalam melakukan pembulatan.

Perhitungan iteratif dalam simpleks pada dasarnya merupakan pemeriksaan satu per satu titik-titik ekstrim layak pada daerah penyelesaian. Pemeriksaan dimulai dari kondisi nol (dimana semua aktivitas/variabel keputusan bernilai nol). Jika titik ekstrim berjumlah n, kemungkinan terburuknya kita akan melakukan perhitungan iteratif sebanyak n kali.

C. METODE M CHARNES

Penyelesaian dasar awal dari suatu system persamaan diidentifikasi dengan adanya matriks satuan Im di mana m adalah banyaknya persamaan.

Contoh 3.4.

Kendala/syarat suatu PL

$$2x_1 + x_2 \leq 15$$

$$X_1 + x_2 \leq 3$$

$$X_1, x_2 \text{ non-negatif; } m = 2$$

Dengan menambahkan s_1 dan s_2 sebagai variabel penambah (slack) non-negatif di ruas kiri kita peroleh $2x_1 + x_2 + s_1 = 5$

$$X_1 + x_2 + s_2 = 3$$

Secara langsung terlihat matriks satuan 1_2 sehingga penyelesaian dasar awal $s_1 = 5$, $s_2 = 3$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Contoh 3.5. Kendala/syarat suatu PL

$$2x_1 + x_2 \leq 15 \qquad (1)$$

$$-x_1 + 2x_2 \geq 10 \qquad (2)$$

$$X_1, x_2 \text{ non-negatif; } m = 2$$

Dengan menambahkan s_1 non-negatif pada persamaan (1) dan mengurangkan s_2 non-negatif pada ruas kiri (2) diperoleh

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 15$$

$$-x_1 + 2x_2 - s_2 = 10$$

Di mana pada contoh tersebut belum terlihat adanya matriks satuan 1_2 agar langsung dapat menemukan penyelesaian dasar awal. Untuk itu perlu menambahkan lagi variabel semu (tiruan, artificial) A pada (2) supaya memperoleh 1_2 dan penyelesaian dasar awal $s_1 = 15$, $A_1 = 10$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_2 = 0$

Contoh 3.6. Kendala/syarat suatu PL

$$2x_1 + x_2 \geq 5$$

$$X_1 + x_2 \geq 3$$

$$X_1, x_2 \geq 0; m = 2$$

Contoh tersebut tidak langsung menunjukan adanya 1_2 sehingga perlu menmbah variabel pengurang

(surplus) s_1 dan s_2 serta variabel buatan (Artificial Variabel = A) A_1 dan A_2 yang non-negatif

System persamaan menjadi $2x_1 + x_2 - s_1 + A_1 = 5$

$$X_1 + x_2 - s_2 + A_2 = 3$$

Yang menunjukan solusi dasar awal $x_1 = x_2 = s_1 = s_2 = 0$; $A_1 = 5$ dan $A_2 = 3$, sebab sudah ada 1_2.

Menjadi persoalan sekarang, bagaimana variabel tiruan (artificial) itu dapat digunakan untuk membantu kita mencari penyelesaian masalah program linear.

Charnes mencoba mencari jawaban atas persoalan tersebut dan menggunakan metode simpleks untuk memaksa variabel artificial menjadi nol, dengan menentukan konstanta (-M) kalau masalah yang dihadapi adalah memaksimumkan fungsi tujuan dan menentukan nilai konstanta (M) pada variabel artificial kalau masalah yang dihadapi adalah meminimumkan.

Bagaimana memaksa variabel artificial mencapai nilai nol? Jawabannya sederhana saja, yaitu memasukan variabel pokok menjadi variabel basis menggantikan variabel tiruan yang sementara menjadi variabel basis.

1. Prosedur pemecahan mengikuti prosedur analisis simpleks baku yaitu: merumuskan masalah PL dalam bentuk baku dengan kendala/syarat berbentuk persamaan, dengan cara menambahkan dengan negative slack variabel bila tanda

pertidaksamaan "$\leq$" (surplus variabel)sekaligus menambahkan variabel tiruan, di mana kiri tanda pertidaksamaan,
2. Pada fungsi tujuan, konstanta variabel slack atau surplus adalah nol, sedangkan variabel tiruan diberi nilai (-M) kalau memaksimumkan dan nilai (M) kalau meminimumkan;
3. Variabel tiruan sebagai variabel basis awal, yang akan segera meninggalkan basis menjadi non-basis (bernilai nol),
4. Ikuti aturan simpleks untuk menentukan nilai fungsi tujuan, yaitu: (a) bila memaksimumkan maka pemecahan selesai atau fungsi atau fungsi tujuan optimal pada saat semua masukan (elemen0 pada baris Z bernilai non-negatif; (b) bila meminimumkan pekerjaan selesai pada saat semua masukan (elemen) pada baris Z non-positif (lawan dari memaksimumkan).

Contoh 3.7:

Fungsi Tujuan :

Minimumkan $Z = 3 X_1 + 2 X_2$

Fungsi kendala : $X_1 + X_2 \geq 2$

$2X_1 + X_2 \geq 3$

$X_1, X_2 \geq 0$

Penyelesaian:

Minimumkan $Z = 3x_1 + 2x_2$

Kendala/syarat $x_1 + x_2 - s_1 \geq 2$ …….(1)

$2x_1 + x_2 - s_2 \geq 3$ …….(2)

$X_j \geq 0;j = 1,2,34;$

s_1 dan s_2 adalah variabel surplus.

Pada penyelesaian solusi awal variabel non basis (bukan variabel dasar), yaitu : $X_1 = X_2 = 0$, maka $S_1 = -2$, $S_2 = -3$,. Penyelesaian solusi awal semua variabel dasar, yaitu S_1, dan S_2 harus non negative

Untuk mengatasi kendala non negatif ini maka diperlukan tambahan variabel yang disebut dengan variabel buatan (Artificial Variabel = A). Dengan tambahan variabel buatan $A \geq 0$ di ruas kiri (1) dan $A \geq 0$ di ruas kiri (2).maka persamaan fungsi pembatas menjadi :

$X_1 + X_2 - S_1 + A_1 = 2$

$2 X_1 + X_2 - S_2 + A_2 = 3$

$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2, \geq 0$

Fungsi tujuan $Z - 3X_1 - 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 - M A_1 - M A_2 = 0$

Ada dua cara penyelesaian yaitu:

a. Metode M Charnes
b. Metode dua tahap

Pada pembahasan ini akan membahas dengan metode M Charnes

$X_1+X_2 - S_1+A_1= 2 \rightarrow A_1 = 2 - X_1- X_2 + S_1$

$2X_1+X_2 -S_2 +A_2 = 3 \rightarrow A_2 = 3 -2X_1- X_2 + S_2$

Substitusikan ke dalam fungsi tujuan

$Z - 3X_1 - 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 - M A_1 - M A_2 = 0$ ($0S_1, 0S_2$ abaikan saja karena nilainya 0)

Sehingga menjadi:

$Z - 3X_1 - 2 X_2 - MA_1 - MA_2 = 0$

$Z - 3 X_1 - 2 X_2 - M(2 -X_1- X_2 + S_1) - M(3 - 2X_1- X_2 + S_2) = 0$

$Z - 3X_1 - 2X_2 - 2M + MX_1 + MX_2 - MS_1 - 3M + 2MX_1 + MX_2 - MS_2$

$Z - (3\text{-}3M)X_1 - (2\text{ -}2M)X_2 - MS_1 - MS_2 = 5\ M$

Data dimasukkan ke dalam tabel simpleks yang telah disederhanakan, sebagai Berikut:

Tabel 3.10

VA / VB	Z	X_1	X_2	s_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio
Z	1	(3-3M)	(2-2M)	0	0	-M	-M	5M	
A_1	0	1	1	-1	0	1	0	2	2
A_2	0	2*	1	0	-1	0	1	3	$\frac{3}{2}$

(0) (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

Catatan: elemen dengan nada (*) adalah elemen kunci (pivot) dalam hal ini $a_{ij} = 2$; menujukan variabel pada kolom ke (1) yaitu x_1 akan menjadi variabel basis dan variabel basis pada baris ke (2) yaitu A_2 menjadi variabel non-basis atau $x_{a2} = 0$.

Dengan memperhatikan konstanta A_a, dan A_2 masing-masing (M) maka data tabel menjadi

Tabel 3.11

VA / VB	Z	X_1	X_2	s_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio

Z	1	$-\frac{3}{3}$	$-\frac{2}{2}$	$-\frac{0}{1}$	$-\frac{0}{1}$	$-\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{5}$	
X_{a1}	0	1	1	-1	0	1	0	2	2
X_{a2}	0	2*	1	0	-1	0	1	3	$\frac{3}{2}$

Data untuk Tabel 3.12

Kolom (1) dan baris (2) menjadi kolom/baris kunci sehingga di dalam Tabel 3.12 kolom x_1 kolom (1) adalah x'_1 = [0, 0, 1]; jadi vector kolom generator T = [$\frac{3-3M}{2}$, $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$].

Dengan menggunakan rumus transformasi $a'_j = a_j + a_{ij}$. T, kita peroleh Tabel 3.12.

Tabel 3.12

VA / VB	Z	X_1	X_2	s_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio
Z	1 -3	0 0	$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	0 -1	$-\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	0 0	$\frac{3}{2}$ $-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$ $\frac{1}{2}$	
A1		0	$\frac{1*}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
X_1		0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3

Informasi yang tercantum dalam Tabel 3.12 belum menunjukan kepada kita untuk dapat mengakhiri kalkulasi simpleks, karena kolom x_2 dan s_2 pada baris Z (baris (0)) masih memperhatikan peluang untuk menaikan nilai Z atau nilai-nilai masih belum optimal.

Data untuk Tabel 3.13

Baris (1) dan kolom (2) merupakan baris/kolom pivot sehingga elemen a_{12} menjadi elemen pivot (kunci) atau a_{12} pada Tabel 3.13 bernilai 1, sementara elemen pada kolom yang sama dan baris lainnya bernilai 0. Vektor kolom generator T = [1-M, 1, -1].

Tabel 3.13 (x_2 menjadi basis menggantikan x_{a1})

VA / VB	Z	X_1	X_2	s_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio
Z	1	0	0	-1	-1	1	1	5	
		0	0	0	0	-1	-1	0	
X_2	0	0	1	0	1	1	-1	1	
X_1		1	0	1	-1	-1	0	1	

Semua elemen (masukan, entri) pada baris Z menunjukan nilai non-positif (lihat baris Z baris kedua kecil sama dengan nol) kecuali nilai konstanta di ruas kanan, berarti nilai Z = adalah nilai optimal (minimum) yang dicapai untuk $x_1 = 1$ dan $x_2 = 1$.

Mungkin anda masih bertanya, bagaimana kalau pembatas suatu masalah meminimumkan (atau memaksimumkan) adalah kombinasi dari pertidaksamaan/persamaan dengan tanda "$\leq$" dan "$\geq$" atau "=".

Ingat, nilai M adalah bilangan positif sekitar 10^6 dan penentuan konstanta variabel tiruan dengan M untuk masalah meminimumkan atau (-M) untuk masalah memaksimumkan. Bagaimana asumsi penetapan nilai M yang awalnya diperkenalkan oleh Charnes? Silahkan Anda cari jawabannya sebagai petunjuk anda perhatikan:

1. Kalau masalah memaksimumkan, untuk bentuk yang mempunyai penyelesaian terhingga, perhitungan simpleks berakhir baris evaluasi nilai Z sudah mencapai nilai non-negatif (karena kita tidak bisa menaikan nilai Z lagi/imbalan negative),
2. Kalau masalah meminimumkan kita perlu memperoleh baris Z dengan semua elemennya non-positif.

Nah, silahkan Anda analisis (sebagai bahan latihan/PR)

Bagaimana kalau pada elemen pada Tabel 3.12 ditentukan berdasarkan data Tabel 3.11 dengan menggunakan pengertian operasi baris elementer?

Perhatikan data pada table 3.10.

Kita beri nama baris Z dengan r_o kolom Z dengan k_0

baris VB ke1 dengan r_1 ; kolom x_1 dengan k_1

baris VB ke2 dengan r_2 ; kolom x_2 dengan k_2,

dan seterusnya

Elemen pivot (kunci) adalah β_{21} karena baris pivot r_2 dan kolom pivot adalah k_1 = [-3 + 3m, 1, 2*], setelah pengerjaan kolom pivot menjadi k_1 = [0, 0, 1] di dalam Tabel 3.12. Jadi pengertian operasi baris berdasarkanelementer,

$$r_o \longrightarrow r_o - \frac{\hat{a}_{01}}{\hat{a}_2} r_2$$

1	-3 + 3M	2 + 2M	-M	-M	0	0	5M
0	3 – 3M	$\frac{3-3M}{2}$	$0\frac{3+m}{2}$	$\frac{3-3m}{2}$	$\frac{(3-3档)3}{2}$		

$r'_o = \left(1, 0, \frac{1+1}{2}, -M, \frac{-3+M}{2}, 0, \frac{3-M}{2}, \frac{M+9}{2}, \right)$

$r'_1 = (0, 1, 1, -1, 0, 1, 0, 1) - \left(0, 1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$= \left(0, 0, \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$r'_2 = \left(0, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)$

Selanjutnya Anda masukan data tersebut ke dalam Tabel 3.13

Cara yang sama (pengulangan murni) dapat kita tempuh untuk memperoleh masukkan table 3.13 berdasarkan data Tabel 3.12.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Perhatikan masalah PL

Maksimumkan $Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3$

Kendala/syarat $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 12$ (1)

$X_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8$ (2)

$4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 17$ (3)

X_1, x_2, x_3 non-negatif

Petunjuk penyelesaian:

1) Masukan variabel penambah (slack variabel) x_4 ke (1), x_5 ke (2), dan x_6 ke (3).
2) Solusi layak dasar awal adalah …
3) Variabel basis dari solusi basis awal yang akan menjadi variabel non-basis adalah ….. variabel non-basis yang menggantikan variabel basis tersebut adalah ….
4) Vector baris $Z_j - C_j$ dalam table simpleks awal adalah …
5) Matriks kolom generator T untuk mentransformasikan semua kolom table awal (ke-1) menjadi table ke-2 adalah …
6) Buat table ke-2 tersebut.
7) Variabel basis dalam table ke-2 yang akan meninggalkan basis adalah …. Penggantiannya adalah ….
8) Buat table ke 3.

   Kesimpulan apakah yang dapat dirumuskan setelah melihat data baris

   $Z_j - C_j$ pada table ke-3?
9) Nilai maksimum Z= … dicapai oleh $x_1 = \ldots$, $x_2 = \ldots$ dan $x_3 = \ldots$
10) Suatu masalah PL dirumuskan sebagai

    Minimum $\quad Z = 4x_1 + x_2$

    Kendala/syarat:

    $$3x_1 + x_2 = 3 \qquad (1)$$
    $$4x_1 + 3x_2 \geq 6 \qquad (2)$$
    $$X_1 + 2x_2 \leq 3 \qquad (3)$$
    $$X_1, x_2 \geq 0$$

    Masukan variabel penambah (slack) x_3 , pengurang (surplus) x_4, variabel tiruan (semu) x_{a1} dan x_{a2}

    Rumuskan masalah menjadi

Minimumkan: $Z = 4x_1 + x_2 + 0.x_4 + M.x_{a1} + M.x_{a2}$ (0)

Kendala/syarat: $3x_1 + x_2 + x_{a1} = 3$ (1)

$4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_{a2} = 6$ (2)

$X_1 + 2x_2 + x_3 = 3$ (3)

Semua variabel non-negatif.

a. Penyelesaian dasar (basis) awal adalah ….
b. Buat Tabel ke-1 di mana konstanta variabel basis sudah disubsitusikan ke $Z_j - C_j$;

   $j = 0, 1, 2, \ldots, (n+4)$
c. Variabel pokok manakah yang akan menjadi basis untuk memperoleh Tabel ke-2? Variabel basis dari Tabel ke-1 yang akan menjadi non-basis adalah ….

   Rasio untuk memilih variabel basis baru itu adalah ….
d. Baris pivot untuk membuat Tabel ke-3 adalah ….
e. Vektor kolom pivot a pivot dalah ….
f. Buat Tabel ke-2
g. Baris pivot untuk membuat Tabel ke-3 adalah ….

   Kolom pivot untuk membuat Tabel ke -3 adalah ….

   Elemen pivot untuk membuat Tabel ke-3 adalah ….

   Variabel yang basis pada Tabel ke-3 adalah ….
h. Buat Tabel ke-3

   Berikan alas an kenapa interasi simpleks berakhir?
i. Nilai minimum Z = …. dicapai oleh x_1 = …. Dan x_2 = ….

11) Suatu masalah PL $Z = 6x_1 + 4x_2$

Kendala/syarat $2x_1 + x_2 \geq 1$

$3x_1 + 4x_2 \geq 1{,}5$

X_2 non-negatif

a. Rumuskan kembali masalah tersebut apabila kita bermaksud menyelesaikan dengan memaksimumkan fungsi tujuan.
b. Masukan variabel surplus dan tiruan x_3 dan x_{a1} ke ruas kiri kendala/syarat ke-1, x_4 dan x_{a2} pada ruas kiri kendala/syarat ke-2 kemudian buat Tabel ke-1 dengan memberikan harga variabel tiruan pada fungsi tujuan yaitu (-M), M adalah bilangan positif besar.
c. Tetapkan kolom pivot, rasio untuk menentukan baris pivot, dan elemen pivot untuk membuat Tabel ke-2.
d. Buat Tabel ke-2.
e. Tetap elemen pivot untuk membuat table ke-3.
f. Buat Tabel ke-3.

   Kenapa iterasi simpleks berhenti setelah membuat table ke-3?
g. Nilai maksimum Z* adalah ….
h. Nilai minimum Z adalah ….

RANGKUMAN

Garis besar uraian tentang prosedur analisis simpleks baku yang telah kita bahas adalah:

1. Anggapan yang mendasari pengerjaan dengan metode simpleks adalah terdapat penyelesaian layak dasar (visible basis) awal. Untuk masalah memaksimumkan, semua kendala/syarat adalah pertidaksamaan dengan tanda "≤" dengan semua $b_1 \geq 0$, di mana variabel penambah (slack)

yang non negative menyediakan suatu penyelesaian layak dasar (visible basis) awal.

2. Jika semua Z non negative maka penyelesaian dasar layak menunjukkan nilai fungsi tujuan

   Maksimum

3. Jika terdapat beberapa Z $\geq$ 0, penyelesaian dapat ditingkatkan dengan memasukan x_k dalam solusi yang meliputi pembuatan table baru, maksimum suatu x_j untuk Z < 0 akan memenuhi. Jika ada beberapa Z < 0 (negative) biasanya dipilih nilai mutlak terbesar untuk memilih kolom pivot x_k.

4. Untuk menghasilakan Tabel baru kita menggunakan proses eliminasi Gauss Jordan (Operasi Baris Elementer) dengan x_k adalah vector kolom yang menunjukan kolom pivot dan baris pivot. Untuk menentukan baris pivot kita anggap semua a_{ik} positif dalam kolom x_k.

5. Jika semua a_{ik} non-negatif di mana Z negative, maka tak ada penyelesaian optimal.

6. Jika ada beberapa a_{ik} yang positif, kita tentukan baris pivot dengan

   cara memilih $\frac{b_1}{a_{ik}}$ terkecil (di mana $a_{ik} > 0$)

   Catatan:

   Kita menunda anggapan tentang apa yang terjadi bila ada 2 atau lebih $\frac{b_1}{a_{ik}}$ terkecil. Hal ini akan dibicarakan kemudian dalam topik degenerasi.

7. Eliminasi Gauss-Jordan digunakan untuk menghilangkan x_k. Selanjutnya kita melengkapi table dan meneruskan

proses analisis simpleks yang dimulai dengan langkah 2 sampai kita menemukan bahwa tidak ada solusi optimal.

Analisis simpleks dengan metode M Charnes digunakan bila pada saat menerjemahkan data PL pada kendala/syarat tidak dijumpai matriks satuan m di mana in adalah jumlah persamaan untuk menentukan penyelesaian dasar awal. Untuk itu perlu menambahkan variabel tiruan (semu, artificial) non-negatif di ruas kiri kendala/syarat yang bertanda "=" atau ">"

Konstanta (harga) variabel tiruan pada fungsi tujuan dikenakan nilai M bila meminimumkan fungsi tujuan, atau -M bila memaksimumkan fungsi tujuan.

Analisis selanjutnya menggunakan aturan simpleks untuk masalah meminimumkan fungsi tujuan.

Fungsi tujuan mencapai optimal bila semua elemen pada baisis evaluasi $Z \geq 0$ (kecuali kasus khusus);

Untuk masalah meminimumkan fungsi tujuan dapat melalui prosedur meminimumkan.

Fungsi tujuan mencapai nilai minimum bila semua elemen pada baris evaluasi $Z \leq 0$ (kecuali ada kasus khusus);

UJI KOMPETENSI

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Kerjakan semua soal berikut!

Perhatikan masalah PL (untuk nomor 1 sampai dengan 4)

Maksimalkan $Z = 4x_1 + 3x_2$

Kendala/syarat $2x_1 + 3x_2 \leq 6$ (1)

$4x_1 + x_2 \leq 0$ (2)

$X_1, x_2 \geq 0$

Masukan variabel penambah s_1 ke ruas kiri (1) dan s_2 ke ruas kiri (2); s_1 dan s_2 non-negatif dan konstanta/ koefisien pada fungsi tujuan adalah 0 (nol).

1) Rasio untuk menentukan elemen pivot menuju table ke-2 (table ke-1 adalah table dengan penyelesaian dasar layak awal) adalah ….

   A. Min (3,1) C. Min (2,1)

   B. Min (2,4) D. Min (6,4)

2) Kolom ke-2 (vector kolom konstanta x_2) pada table ke-2 adalah ….

   A. [0,1,0] C. $\frac{1}{4}$ [10,1,-4]

   B. [1,0,0] D. $\frac{1}{2}$ [5,2,4]

3) Kolom ke-3 (vector kolom x_3) pada table ke-3 adalah ….

   A. [0,1,0] C. 0,1 [-1,4,8]

   B. [1,0,0] D. 0,1 [4,-8,8]

4) Nilai maksimum Z adalah ….

   A. 4,8 C. 7,2

   B. 6,4 D. 8,2

Untuk nomor 5 sampai dengan 6

Perhatikan data hasil perhitungan pada tahapan tertentu.

C_j	10	8	6	5	0	0	0	
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	B
	0	11	-10	-12				130
	1	-2	3	4	1	-3	0	15
	0	4	0	3	0	1	0	20
					0	0	1	

5) Pasangan variabel yang akan menjadi basis dan yang akan keluar basis berdasarkan data tersebut adalah ….

A. X_1 dan x_2
C. X_2 dan x_7
B. X_2 dan x_6
D. X_3 dan x_7

6) Nilai Z_j - C_j pada kolom konstanta b adalah ….

A. 130
C. 160
B. 150
D. 165

7) Perhatikan data berikut

	X_1	X_2	X_3	X_4	X	X_6	B
Z	-10	-7	-12	0	5	0	
	2	3	1	1	0	0	20
	3	1	1	0	0	0	30
	4	2	2	0	1	1	20
					0		

Pasangan variabel yang akan menjadi basis dan yang akan keluar basis setelah pemecahan Layak dasar awal adalah ….

A. X_1 dan x_4
B. X_1 dan x_5
C. Dan x_6
D. Dan x_6

Untuk nomor 8 sampai dengan 10

Diketahui suatu masalah PL

Maksimumkan $Z= 5x_1 + 7x_2 + 2x_3$

kendala/syarat: $x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 35$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$$

$$X_1 + 2x_2 + x_3 \leq 50$$

$$X_{1,} x_2, x_3, \leq 0$$

8) Variabel basis dari penyelesaian dasar awal adalah x_4, x_5, x_6 yang non negative. Variabel basis yang akan menjadi non-basis yang akan menjadi non-basis dan variabel non-basis penggantinnya adalah ….
   A. X_1 menggantikan x_6
   B. X_1 menggantikan x_5
   C. X_3 menggantikan x_6
   D. X_2 menggantikan x_6

9) Nilai maksimum Z dicapai oleh variabel basis ….
   A. $X_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 20$ C. $X_1 = 10$, $x_2 = 10$, $x_3 = 0$
   B. $X_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 0$ D. $X_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 5$

10) Nilai Z maksimum itu adalah ….
   A. 135 C. 190
   B. 170 D. 225

Perhatikan data Tabel ke-2 (sesudah pemecahan dasar awal) dari suatu masalah PL, sebagai berikut.

C_j		-5	-3	-6	0	0	0	-M	-M	-M		
Vari-abel Basis	C_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	b	Rasio
…	..	2	0	$\frac{1}{2}$	-1	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	15	(1)
…	X_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	15	(2) (3) (0)

C_j		-5	-3	-6	0	0	0	-M	-M	-M	b	Rasio
Vari-abel Basis	C_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9		
…	. . .	2	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$	1	11	
$Z_j - c_j$	..	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9)
(10)

11) Variabel basis yang tampak adalah ….

A. X_2, x_4, x_9
B. X_2, x_7, x_8
C. X_2, x_6,x_8
D. X_2, x_7, x_9

12) Variabel yang digantikan oleh x_2 sehingga menjadi variabel basis adalah ….

A. X_4
B. X_7
C. X_8
D. X_9

13) Vektor kolom generator T yang digunakan untuk mentrasformasikan kolom x_2 Tabel ke-1 (Tabel awal0 menjadi x_2 = [0, 1, 0] adalah …

A. [1,2,1]
B. $\frac{1}{2}$ [1, 1, 1]
C. $\frac{1}{2}$ [-1, -1, -1]
D. $\frac{1}{2}$ [0, 1, 0]

14) Elemen pada baris $Z_j - C_j$ kolom b adalah ….

A. -45 -26M

B. -75 -26M

C. -90 - 26M

D. -33 – 30M

15) Elemen pivot untuk memperoleh Tabel ke-3 adalah ….

A. X_1

B. X_2

C. X_3

D. X_4

16) Elemen baris (1) kolom b pada Tabel ke-3 adalah ….

A. 4

B. $\frac{11}{2}$

C. 11

D. 15

17) Elemen pada baris $Z_j - C_j$ kolom b Tabel ke-3 adalah ….

A. -4M – 78

B. $-4M - \frac{145}{2}$

C. – 11M – 26

D. $-15M - \frac{145}{2}$

18) Nilai optimal (Minimum Z) adalah ….

A. 45,5

B. 62,5

C. 75,5

D. 82,5

Untuk nomor 19 dan 20

Diketahui suatu PL

$$Z = 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 \qquad \text{Min}$$

Kendala/syarat: $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 18$ (1)

$2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 40$ (2)

$X_2 + x_3 \geq 7$ (3)

$X_j \geq 0$; $j = 1,2,3$

Masukkan variabel non-negatif penambah 9slack) x_4, variabel pengurang x_5 dan x_6; variabel tiruan (artifisial) x_7 dan x_8.

19) Nilai masing-masing variabel basis di dalam pemecahan awal adalah ….
   A. $X_4 = 18$, $x_7 = 40$, $x_8 = 7$
   B. $X_5 = 18$, $x_7 = 40$, $x_8 = 7$
   C. $X_4 = 18$, $x_5 = 40$, $x_6 = 7$
   D. $X_7 = 18$, $x_4 = 40$, $x_8 = 7$

20) Variabel basis Tabel awal (ke-1) yang digantikan oleh variabel x_1 pada Tabel ke-2 adalah ….
   A. X_4
   B. X_6
   C. X_7
   D. X_8

BAB IV

METODE SIMPLEKS DUA FASE

Sebaiknya selalu diingat proses memilih elemen pivot (kunci), menggunakan rumus trasformasi dengan bantuan operasi baris elementer, merumuskan kesimpulan untuk mengakhiri perhitungan simpleks baku, karena beberapa subtopik yang telah dibahas di dalam bab 1 samapai dengan 3 akan terus digunakan.

Metode simpleks dua fase merupakan suatu modifikasi dari metode M'Carnes. Kalau dengan metode M, Charnes koefisien variabel tiruan (bantuan, semu) mendapatkan harga (-M) untuk memperoleh memaksimumkan atau (M) untuk persoalan meminimumkan sedangkan dengan metode simpleks dua fase harga (konstanta) variabel tiruan pada fungsi tujuan diberi (-1) bila masalah memaksimumkan atau (+1) bila masalah PL meminimumkan.

Satu kekurangan dari metode M dalam peme-cahan persoalan PL (metode simpleks) kasus minimisasi adalah kemungkinan salah perhitungan yang dapat dihasilkan dari pem-berian nilai M yang terlalu besar. Untuk me-ngatasi kekurangan ini maka dirancang suatu metode yang disebut : **Metode Dua Tahap**

Prosedur analisis Fase I maupun fase II menggunakan tabel simpleks baku dengan modifikasi tertentu.

FASE I

Tahap awal:

Menyajikan data PL ke dalam bentuk baku kemudian masukan ke dalam tabel simpleks baku dengan catatan koefisien harga fungsi tujuan untuk variabel pokok dan variabel tiruan diberi nilai (-1)kalau persoalan PL adalah memaksimumkan.

Tahapan analisis simpleks (tabel 1 dan seterusnya)

1. Menentukan variabel basis.
2. Menentukan variabel pengganti dengan bantuan opererasi baris elementer, kolom kunci, baris kunci dan elemen pivot (angka kunci).

Tahap akhir fase i.

Fase ini digunakan untuk menguji apakah persoalan yang dihadapi memiliki solusi fisibel atau tidak. Pada fase ini fungsi tujuan semula diganti dengan *meminimumkan jumlah variabel artifisialnya*. Jika nilai minimum fungsi tujuan baru ini berharga nol (artinya seluruh variabel artifisial berharga nol), berarti persoalan memiliki solusi fisibel, lanjutkan ke fase 2. Tetapi, jika nilai minimum fungsi tujuan baru ini berharga positif, maka persoalan tidak memiliki solusi fisibel. STOP

FASE II

Gunakan solusi basis optimum dari fase 1 sebagai solusi awal bagi persoalan semula. Dalam hal ini ubahlah bentuk fungsi tujuan fase 1 dengan mengembalikannya pada fungsi tujuan persoalan semula. Pemecahan persoalan dilakukan dengan cara simpleks biasa.

1. Beberapa persyaratan yang harus diperhatikan dalam fase I.

   Modifikasi yang dilakukan dalam metode dua fase sehingga membedakannya dengan metode M'Charnes adalah

a. Fungsi tujuan dalam analisis fase I.
   1) Koefisien harga variabel $c_j = 0$; $j = 1, \ldots., k$
   2) Koefisien harga variabel slack atau surplus $c_j = j = (k + 1), (k + 2), \ldots, r$
   3) Koefisien harga variabel tiruan (semu, artifisial) $c_j = -1$ (untuk persoalan memaksimumkan),

      $J = (r+1), (r+2), \ldots, N$

   menggantikan konstanta variabel pokok fungsi tujuan dari nol menjadi nilai yang diambil dari bentuk baku awal. Selanjutnya baris Z dihitung kembali dengan aturan yang digunakan dalam analisis simpleks baku. Dengan demikian table akhir fase I merupakan table awal fase II dengan

   Jadi dalam fase I kita berusaha untuk memaksimumkan Z* bukan memaksimumkan Z. Mengapa?

   Perhatikanlah: Fungsi tujuan asli $Z = \sum c_j \cdot x_j$

   Karena $c_j = 0$ maka

   $c_j x_j = 0$ sehingga $Z = 0$

   Sementara itu

$$Z^* = \sum_{j=1}^{i}(-1) \cdot x_{ai} = -J.x_{ai}$$

   J adalah matriks baris (1, 1, 1, …., 1) dan

X_{ai} adalah matriks kolom yang berisikan variabel tiruan (buatan, semu, artificial).

$X_{ai} = [x_{ai}, x_{a2}, \ldots, x_{a5}]$ dengan catatan semua variabel tiruan bernilai non negative.

Karena sasaran fase I adalah membuat variabel tiruan menjadi non-basis maka di antara tiga situasi berikut ini akan tampak:

1) Semua variabel artificial menjadi (non basis),
2) Satu atau lebih variabel artificial non-degenerasi dan tak dapat dibuat menjadi non basis, dan
3) Satu atau lebih variabel artivisial degenerasi tak dapat dibuat menjadi non-basis, sementara itu nilai Z* = 0 yang menunjukan analisis fase I selesai (berhenti)

b. Fase I berakhir dalam kondisi Z* = maka simpulan untuk meneruskan ke fase II dengan memperhatikan tiga kemungkinan di atas atau dinyatakan sebagai,

   1) Z* maks <0, di mana satu atau lebih variabel buatan berada dalam basis pada tingkat nilai yang positif. Masalah PL yang *asli tidak mempunyai penyelesaian layak (fisibel)*

   2) Z* maks = 0, dengan kenyataan tidak ada variabel buatan terletak dalam basis, ini berarti telah diperoleh penyelesaian layak dasar (fisibel basis) dari persoalan PL yang asli.

   3) Z* maks = 0, dengan kenyataan satu atau lebih variabel buatan terletak dalam basis pada tingkat nol (*degenerasi*). Kenyataan ini juga menunjukan bahwa telah diperoleh penyelesaian layak dasar (*fisibel basis*) dari masalah PL yang asli.

2. Beberapa persyaratan untuk memulai perhitungan fase II

   Perhitungan fase II merupakan lanjutan fase I apabila akhir fase I menunjukan kemungkinan (2) atau (3). Tabel awal fase II adalah table akhir fase I dengan modifikasi sebagai berikut:

   a. Koefisien harga fungsi tujuan adalah koefisien harga fungsi tujuan yang asli, atau nilai koefisien variabel pokok pada fase I, yaitu nol harus diganti dengan koefisien asli.
   b. Elemen pada baris Z

   Kalau ternyata $a_{ij} = 0$ untuk semua j dan untuk I yang sesuai dengan kolom baris yang mengandung variabel (vector) buatan maka baris dengan semua $a_{ij} = 0$ dapat dihilangkan (dicoret) dan vector buatan tersebut. Mengapa? Silahkan membaca persyaratan tentang penyelesaian dasar pada Modul I dan 2. Demikian pula apabila ada satu atau lebih variabel buatan yang muncul pada tingkat nol dan paling tidak terdapat satu baris yang sesuai dengan suatu kolom variabel buatan, di mana $a_{ij} = 0$ maka variabel buatan itu tetap mempunyai nilai nol (tidak mempengaruhi nilai Z).

   Kriteria yang digunakan dalam fase II, untuk menentukan elemen kunci pivot dan menyingkirkan suatu variabel dari basis menjadi nol-basis adalah sama dengan criteria analisis simpleks baku.

   Uraian di atas akan menjadi jelas bila kita kerjakan contoh soal berikut.

Contoh 4.1

Fungsi tujuan

Min $Z=12 X_1 + 5X_2$

Fungsi kendala :

$4X_1 + 2X_2 \geq 80$

$2X_1 + 3X_2 \geq 90$

$X_1, X_2 \geq 0$

$4X_1 + 2X_2 - S_1 + A_1 = 80$

$2 X_1 + 3X_2 - S_2 + A_2 = 90$

$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2, \geq 0$

Fungsi tujuan $Z= 3X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 +M A_1 + M A_2$

$4X_1 + 2X_2 - S_1 + A_1 = 80$; $A_1=80 - 4X_1 - 2X_2 + S_1$

$2 X_1 + 3X_2 - S_2 + A_2 = 90$; $A_2= 90 - 2X_1 - 3X_2 + S_2$

$X_1, X_2, S_1, S_2, , A_1, A_2, \geq 0$

Misalkan $Z=12 X_1 + 5X_2 =$

$12 X_1 = A_1$

$5X_2 = A_2$

Maka $Z = A_1 + A_2$

$Z = A_1 + A_2$

Substitusikan fungsi pembatas ke dalam fungsi tujuan :

$Z = A_1 + A_2 +$

$Z = 80 - 4X_1 - 2X_2 + S_1 + 90 - 2X_1 - 3X_2 + S_2$

$Z = 170 - 6X_1 - 5X_2 + S_1 + S_2$

Jadi : persamaan fungsi tujuan :

$Z + 6X_1 + 5X_2 - S_1 - S_2 = 170$

Masukan dalam tambel simpek

Tabel simplek iterasi 0

Var dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio
Z	6	5	-1	-1	0	0	170	
A_1	4	2	-1	0	1	0	80	
A_2	2	3	0	-1	0	1	90	

Menentukan kolom kunci dan baris kunci

Var dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio
Z	6	5	-1	-1	0	0	170	
A_1	4	2	-1	0	1	0	80	20
A_2	2	3	0	-1	0	1	90	45

Nilai baris kunci baru = (Nilai baris kunci lama) : n-angka kunci

Var dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio

Z								
X_1	1	1/2	-1/4	0	1/4	0	20	
A_2								

Baris baru = baris lama – (koefisien pada kolom kunci) x nilai baru baris kunci

Baris Z

		6	5	-1	-1	0	0	170
	(6)	1	1/2	-1/4	0	1/4	0	20
Nilai baru	=	[0	2	1/2	-1	-3/2	0	50

Baris 2 pembatas 2

		2	3	0	-1	0	1	90
	(2)	1	1/2	-1/4	0	1/4	0	20
Nilai baru	=	[0	2	1/2	-1	-1/2	1	50

Tabel tamplek iterasi 1 menjadi:

Var Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio
Z	0	2	1/2	-1	- 3/2	0	50	
X_1	1	1/2	-	0	1/4	0	20	

			1/4					
A_2	0	2	1/2	-1	-1/2	1	50	

Tentukan lagi kolom kunci dan baris kunci

Var Dasar	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**A_1**	**A_2**	**NK**	**Rasio**
Z	0	2	1/2	-1	-3/2	0	50	
X_1	1	1/2	-1/4	0	1/4	0	20	40
A_2	0	2	1/2	-1	-1/2	1	50	25

Nilai baris kunci baru = (Nilai baris kunci lama) : n-angka kunci

Var Dasar	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**A_1**	**A_2**	**NK**	**Rasio**
Z								
X_1								
X_2	0	1	1/4	-1/2	-1/4	1/2	25	

Baris baru = baris lama – (koefisien pada kolom kunci) x nilai baru baris kunci

Baris Z

		0	2	1/2	-1	-3/2	0	50
	(2)	0	1	1/4	-1/2	-1/4	1/2	25
Nilai baru	=	[0	0	0	0	-1	-1	0

Baris 1 pembatas 1

		1	1/ 2	-1/4	0	1/4	0	20
	(1/2)	0	1	1/4	-1/2	-1/4	1/2	25
Nilai baru	=	[1	0	-3/8	1/4	3/8	-1/4	15 /2

Tabel tamplek iterasi 2 menjadi:

Var Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio
Z	0	0	0	0	-1	-1	0	
X_1	1	0	-3/8	1/4	3/8	- 1/4	15/2	
X_2	0	1	1/4	- 1/2	- 1/4	1/2	25	

Baris Z tidak ada yang bernilai positif kecuali nol maka fase pertama selesai.

Berdasarkan Tabel solusi optimum tahap I diperoleh :

$X_1 - 3/8\ S_1 + ¼\ S_2 = 15/2 \rightarrow X_1 = 15/2 + 3/8S_1 - ¼\ S_2$ ..(1)

$X_2 + ¼\ S_1 - ½\ S_2 = 25 \rightarrow X_2 = 25 - ¼\ S_1 + ½\ S_2$ …(3)

Perhartian: Kolom A_1 dan A_2 abaikan saja.

Tahap II :

Substitusikan persamaan (1),(2), dari solusi optimum tahap I ke persamaan fungsi tujuan :

$Z = 12\ X_1 + 5\ X_2$

$= 12\ (15/2 + 3/8S_1 - ¼\ S_2) + 5\ (25 - ¼\ S_1 + ½\ S_2)$

$= 90+18/4\ S_1 - 3\ S_2 +125-5/4\ S_1 + 5/2\ S_2$

$Z = 215+13/4S_1 + 1/2\ S_2$

$Z - 13/4\ S_1 +1/2\ S_2 = 215$

Masukkan nilai ke dalam tabel simplek

Tabel simplek 2

Var Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Rasio
Z	0	0	-13/4	1/2	215	
X_1	1	0	-3/8	1/4	15/2	
X_2	0	1	1/4	- 1/2	25	

Menentukan kolom dan baris kunci

Var Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Rasio
Z	0	0	-13/4	1/2	215	
X_1	1	0	-3/8	1/4	15/2	30
X_2	0	1	1/4	-1/2	25	50

Nilai baris kunci baru = (Nilai baris kunci lama) : n-angka kunci

Var Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Rasio
Z						
X_1	4	0	-3/2	1	30	
X_2						

Baris baru = baris lama – (koefisien pada kolom kunci) x nilai baru baris kunci

Baris Z

		0	0	-13/4	1/2	215

	(1/2)	4	0	-3/2	1	30
Nilai baru	=	[-2	0	-1/2	0	200

Baris 1 pembatas 1

		0	1	1/4	-1/2	25
	(-1/2)	4	0	-3/2	1	30
Nilai baru	=	[2	1	-1/2	0	40

Tabel tamplek iterasi 3 menjadi:

Var Dasar	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**NK**	**Rasio**
Z	-2	0	-1/2	0	200	
S_1	4	0	-3/2	1	30	
X_2	2	1	-1/2	0	40	

Dari Tabel optimum simpleks tahap II terlihat bahwa koefisien fungsi tujuan tidak ada yang bernilai positif kecuali nol. Ini menunjukkan kondisi tabel simpleks tahap II sudah optimum, dengan nilai

x1 = 0, x2 = 40 dan zmin = 200

Contoh 4.2

Fungsi tujuan

Minimumkan : $z = 3x1 + 5x2$

Fungsi kendala

$x1 \leq 4$

$2x2 = 12$

$3x1 + 2x2 \geq 18$

$x1, x2 \geq 0$

Penyelesaian

Minimumkan : $z = 3x1 + 5x2 + 0S1 + 0S2 + MA1 + MA2$

$$x1 + S1 = 4$$

$$2x2 + A1 = 12$$

$$3x1 + 2x2 \quad - S2 + A2 = 18$$

$x1, x2 , S1, S2, A1 , A2 \geq 0$

Diperoleh persamaan-persamaan :

$A1 = 12 - 2x2$

$A2 = 18 - 3x1 - 2x2 + S2$

Misalkan Min : $z = 3x1 + 5x2$

$3x1 = A1$

$3x1 = A2$

Makan $Z = A1 + A2$

Fase 1

Minimumkan :

$Z = A1 + A2$

$Z = 12 - 2x2 + 18 - 3x1 - 2x2 + S2$

$Z=30 - 3x1 - 4x2 + S2$

Atau :

$Z + 3x1 + 4x2 - S2 = 30$

Masukan dalam tabel simplek

Tabel simplek Iterasi 0

Var Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio
Z	3	4	0	-1	0	0	30	-
S_1	1	0	1	0	0	0	4	-
A_1	0	2	0	0	1	0	12	-
A_2	3	2	0	-1	0	1	18	-

Menentukan kolom kunci dan bari kunci

Var Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio
Z	3	4	0	-1	0	0	30	-
S_1	1	0	1	0	0	0	4	-
A_1	0	2	0	0	1	0	12	6
A_2	3	2	0	-1	0	1	18	9

Nilai baris kunci baru = (Nilai baris kunci lama) : n-angka kunci

Var Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio
Z								
S_1								
X_2	0	1	0	0	1/2	0	6	
A_2								

Baris baru = baris lama – (koefisien pada kolom kunci) x nilai baru baris kunci

Baris pertama z

		3	4	0	-1	0	0	30
	(4)	0	1	0	0	1/2	0	6
Nilai baru	=	3	0	0	-1	-2	0	6

Baris S_1

		1	0	1	0	0	0	4
	(0)	0	1	0	0	1/2	0	6
Nilai baru	=	1	0	1	0	0	0	4

Baris A_2

		3	2	0	-1	0	1	18
	(2)	0	1	0	0	1/2	0	6
Nilai baru	=	3	0	0	-1	-1	1	6

Iterasi 1 menjadi

Var Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio
Z	3	0	0	-1	-2	0	6	
S_1	1	0	1	0	0	0	4	
X_2	0	1	0	0	1/2	0	6	
A_2	3	0	0	-1	-1	1	6	

Menentukan kolom kunci, baris kunci dan angka kunvi (pivot)

Var Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio
Z	3	0	0	-1	-2	0	6	-
S_1	1	0	1	0	0	0	4	4
X_2	0	1	0	0	1/2	0	6	-

A_2	3	0	0	-1	-1	1	6	2

Nilai baris kunci baru = (Nilai baris kunci lama) : n-angka kunci

Var Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio
Z								
S_1								
X_2								
X_1	1	0	0	-1/3	-1/3	1/3	2	

Baris baru = baris lama – (koefisien pada kolom kunci) x nilai baru baris kunci

Baris pertama z

		3	0	0	-1	-2	0	6
	(3)	1	0	0	-1/3	-1/3	1/3	2
Nilai baru	=	0	0	0	0	-1	-1	0

Baris S_1

		1	0	1	0	0	0	4
	(1)	1	0	0	-1/3	-1/3	1/3	2
Nilai baru	=	0	0	1	1/3	1/3	-1/3	2

Baris x_2

	0	1	0	0	1/2	0	6	0
	1	0	0	-1/3	-1/3	1/3	2	1
Nilai baru	0	1	0	0	1/2	0	6	0

Iterasi 2 menjadi

Var Dasar	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**A_1**	**A_2**	**NK**	**Rasio**
Z	0	0	0	0	-1	-1	0	
S_1	0	0	1	1/3	1/3	-1/3	2	
X_2	0	1	0	0	1/2	0	6	
X_1	1	0	0	-1/3	-1/3	1/3	2	

Baris Z tidak ada yang bernilai positif kecuali no maka fase pertama selesai.

Persoalan memiliki solusi:

Ingat: kolom A_1 dan A_2 di abakan saja

S1 + 1/3 S2 = 2

x2 = 6

x1 - 1/3 S2 = 2 → x1 = 2 + 1/3 S2

Kembali ke persamaan semula : Minimumkan : $z = 3\ x_1 + 5\ x_2$

Tahap II :

Substitusikan persamaan (1),(2), dari solusi optimum tahap I ke persamaan fungsi tujuan :

Minimumkan : z = 3 (2 + 1/3 S2) + 5 (6)

Atau

z - S2 = 36

VarDasar	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Rasio
Z	0	0	-1	0	36	
S_1	0	0	1	1/3	2	
X_2	0	1	0	0	6	
X_1	1	0	0	-1/3	2	

Tabel di atas sudah langsung merupakan tabel optimal karena tidak ada baris nilai bernilai positif kecuali nol.

x1= 2

x2=6

Zmin= 36

Contoh 4.1.

Metode ini digunakan untuk menyelesaikan persoalan PL yang memuat variabel buatan

Contoh = Min $Z = 4X_1 + X_2$

Kendala $3X_1 + X_2 = 3$

$4X_1 + 3X_2 \geq 6$

$X_1 + 2X_2 \leq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

<u>Tahap 1</u> :

Bentuk dengan var buatan : R_1 dan R_2

Min $r = R_1 + R_2$

Kendala $3X_1 + X_2 + R_1 = 3$

$4X_1 + 3X_2 - X_3 - R_2 = 6$

$X_1 + 2X_2 + X_4 = 4$

$X_1, X_2, X_3, R_1, R_2, X_4 \geq 0$

Fungsi tujuan $r = R_1 + R_2$

$= (3 - 3X_1 - X_2) + (6 - 4X_1 - 3X_2 + X_3)$

$= -7X_1 - 4X_2 + X_3 + 9$

Tabel Awal

VB	X_1	X_2	X_3	R_1	R_2	X_4	NK
r	7	4	-1	0	0	0	9

R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
X_4	1	2	0	0	0	1	4

Tabel optimum : setelah 2 iterasi (periksa !)

VB	X_1	X_2	X_3	R_1	R_2	X_4	NK
r	0	0	0	-1	-1	0	0
X_1	1	0	$^1/_5$	$^3/_5$	$-^1/_5$	0	$^3/_5$
X_2	0	1	$-^3/_5$	$-^4/_5$	$^3/_5$	0	$^6/_5$
X_4	0	0	1	1	-1	1	1

Karena minimum solusi r = 0, masalah ini memiliki pemecahan (solusi) layak. Lanjutkan ke tahap (Fase) kedua.

<u>Tahap 2</u>

☞ Menyingkirkan variabel buatan (R_1 dan R_2)

☞ Dari tabel optimum tahap 1 didapatkan :

$$X_1 + {}^1/_5 X_3 = {}^3/_5$$
$$X_2 - {}^3/_5 X_3 = {}^6/_5$$
$$X_3 + X_4 = 1$$

Masalah semula ditulis :

$$\text{Min } Z = 4X_1 + X_2$$

Kendala
$$X_1 + {}^1/_5 X_3 = {}^3/_5 \quad \text{........(1)}$$
$$X_2 - {}^3/_5 X_3 = {}^6/_5 \quad \text{........(2)}$$
$$X_3 + X_4 = 1$$
$$X_1, X_2, X_3, R_1, R_2, X_4 \geq 0$$

Maka terdapat 3 persamaan dan 4 variabel sehingga solusi dasar layak didapat dg membuat (4 – 3) = 1 variabel dibuat <u>nol</u>

$X_3 = 0 \quad \rightarrow \quad X_1 = {}^3/_5 \;;\; X_2 = {}^6/_5 \;;$

$X_4 = 1$

☞ Fungsi tujuan $Z = 4X_1 + X_2$

$= 4\left({}^3/_5 + {}^1/_5 X_3\right) + \left({}^6/_5 + {}^3/_5 X_3\right)$

$= -{}^1/_5 X_3 + {}^{18}/_5$

Tabel Awal

Var msk ↓ (X_3)

VB	X_1	X_2	X_3	X_4	NK
Z	0	0	$^1/_5$	0	$^{18}/_5$
X_1	1	0	$^1/_5$	0	$^3/_5$
X_2	0	1	$-^3/_5$	0	$^6/_5$
X_4	0	0	***1***	1	1

Tabel optimum

VB	X_1	X_2	X_3	X_4	NK
Z	0	0	0	$-^1/_5$	$^{17}/_5$
X_1	1	0	0	$-^1/_5$	$^2/_5$
X_2	0	1	0	$^3/_5$	$^9/_5$
X_3	0	0	1	1	1

LATIHAN

1) Perhatikan Persoalan PL berikut

Minimumkan $Z = 5x_1 + 3x_2$

Dengan syarat $2x_1 + x_2 \geq 3$ (1)

$X_1 + x_2 \geq 2$ (2)

X_1dan x_2 non-negatif

a. Buatlah bentuk baku dengan memasukan x_3 dan x_4 Ke dalam (1) dan (2).

b. Buatlah bentuk baku lengkap dengan memasukan variabel buatan x_5 dan x_6 ke dalam (1a) dan (2a) di mana fungsi tujuan dimaksimumkan untuk memulai fase I.

c. Buatlah table awal fase I (table 4.1).

d. Carilah elemen pivot kemudian trasformasi data table 4.1 menjadi table 4.2.

e. Carilah elemen pivot, kemudian transformasi data table 2 menjadi table 4.3

f. Apakah fase I biasa berakhir?

Kalau anda menjawab "ya", silakan buat table 4.4 (awal fase II).

Apakah sudah nilai minimum Z dapat ditentukan?

Kalau dijawab "sudah", berilah alasannya.

Berapakah nilai minimum tersebut?

2) Perhatikan masalah PL berikut

Minimumkan $Z= 4x_1 + x_2$

Dengan syarat $3x_1 + x_2 = 3$

$4x_1 + 3x_2 \geq 6$

$X_1 + 2x_2 \leq 3$

X_1 dan x_2 non negative

a. Rumuskan persoalan ini dalam bentuk baku dengan memaksimumkan variabel penambah x_3 pengurang x_4 dan x_5.
b. Rumuskan kembali bentuk baku pada persoalan (a) dengan memaksimumkan fungsi tujuan, tambahkan variabel tiruan (semu, artificial) serta berikan koefisien (-1)untuk variabel tiruan pada fungsi tujuan.
c. Carilah penyelesaian masalah sampai akhir fase I
d. Kalau nilai fase I berakhir, buatlah table awal fase II.
e. Selesaikan fase II kemudian rumuskan simpulan tentang nilai minimum fungsi tujuan.

RANGKUMAN

Metode dua fase yang merupakan modifikasi dari metode M'Charnes digunakan untuk memecahkan masalah yang memerlukan masukan variabel artificial. Perbedaan dengan metode dua fase terletak pada pemberian konstanta variabel artificial. Jika pada metode M'Charnes konstanta variabel artificial diberi (-M) bila memaksimumkan de dua fase konstanta variabel artificial an (M) bila memunimumkan, maka pada metode dua fase konstanta variabel artificial untuk fungsi tujuan adalah (-1) bila memaksimumkan dan (1) bila meminimumkan.

Analisis simpleks dilakukan dalam dua fase. Di dalam fase I, konstanta variabel pokok diberi nilai nol sedangkan konstanta bariabel artificial deberi nilai (-1) bila memaksimumkan. Prosedur analisis sama dengan analisis simpleks baku. Akhir fase I ditetapkan berdasarkan nilai elemen Zyaitu:

1. Jika $Z^*_{maks} = 0$ berarti fase I berakhir dengan catatan (a) semua variabel buatan tidak berada dalam basis berarti semua variabel buatan (artificial) sedah bisa dihilangkan dalam analisis (tidak berfungsi lagi), (b) terdapat satu atau beberapa variabel buatan yang memperoleh penyelesaian layak dasar (visible basis) dari masalah PL yang asli.
2. Jika ternyata $Z^* < 0$ di mana konstanta variabel buatan yang dalam basis pada tingkat positif maka kesimpulannya masalah PL tidak mempunyai penyelesaian layak (visible)

Pada awal fase II, di mana $Z^* = 0$, semua konstanta pokok kita masukkan dari bentuk baku, sedangkan variabel buatan dibuang/ tidak ikut dalam analisis. Dengan demikian tabel akhir fase I merupakan tabel awal fase II dengan menggantikan konstanta variabel pokok fungsi tujuan dari nol menjadi nilai yang diambil dari bentuk baku awal. Selanjutnya baris Z dihitung kembali dengan aturan yang digunakan dalam analisis simpleks baku

UJI KOMPETENSI

Untuk nomor 1 sampai dengan 5.

Suatu masalah PL dirumuskan dalam bentuk baku

Minimumkan $Z = 50x_1 + 25x_2$

Syarat $x_1 + 3x_2 - x_3 + x_6 = 8$

$3x_1 + 4x_2 - x_4 + x_7 = 19$

$3x_1 + x_2 - x_5 + x_8 = 7$

X_3, x_4, dan x_5 adalah variabel pengurang

X_6, x_7, dan x_8 adalah variabel buatan

X_j non-negatif untuk j = 1, 2, …., 8

1) Pada awal fase I, setelah variabel buatan menjadi variabel basis maka variabel pokok yang akan memasuki basis pertama kali adalah ….

   A. X_1 menggantikan x_6
   B. X_2 menggantikan x_8
   C. X_1 menggantikan x_7
   D. X_2 menggantikan x_6

2) Nilai $Z_j - c_j$ pada kolom harga basis (HB) yang dirunjukkan oleh tabel ke-1 (awal fase I) adalah ….

   A. -50
   B. -34
   C. -25
   D. 0

3) Kolom x_1 pada tabel ke-2 (fase I) adalah ….

   A. [0, 0, 1, 0]
   B. $\frac{1}{3}$ [-1, 4, 1, -11]
   C. $\frac{1}{3}$ [1, 5, 8, -3]
   D. $\frac{1}{3}$ [-1, -5, -8, -13]

4) Nilai Z_j - c_j pada kolom harga basis (HB) yang ditunjukan oleh ke-2 adalah ….

   A. $\frac{-45}{8}$
   B. $\frac{-38}{3}$
   C. $\frac{-40}{3}$
   D. 0

5) Variabel basis yang ditunjukkan oleh tabel ke-3 secara berurutan adalah ….

   A. X_1, x_7, x_8
   B. X_1, x_7, x_2
   C. X_1, x_5, x_2
   D. X_2, x_7, x_1

6) Variabel basis yang ditunjukkan oleh tabel ke-4 (akhir fase II) secara berurutan ….

   A. X_1, x_5, x_2
   C. X_1, x_2, x_3

B. X_2, x_3, x_1 D. X_2, x_4, x_1

7) Nilai minimum fungsi Z adalah …..

A. 125 C. 150

B. 225 D. 350

Untuk nomor 8 sampai dengan 10

Minimumkan $Z = x_1 - 2x_2$

Syarat $x_1 + x_2 \geq 2$ (p_1)

$-x_1 + x_2 \geq 1$ (p_2)

$X_2 \leq 3$ (p_3)

$X_1, x_2 \geq 0$

Masukkan variabel pengurang (surplus) x_3 dan artifisial x_6 ke syarat (p_1), masukkan variabel pengurang x_4 dan artifisial x_7 ke syarat (p_2) dan masukan variabel penambah (*slack*) ke syarat (p_3).

Rumuskan masalah PL itu dalam bentuk baku dengan memaksimumkan fungsi tujuan untuk menyelesaikan metode dua fase.

8) Setelah kita buat tabel ke-1 (awal fase I) maka variabel basis yang meninggalkan basis adalah ….

A. X_6 digantikan oleh x_2 C. X_7 digantikan oleh x_2

B. X_6 digantikan oleh x_1 D. X_7 digantikan oleh x_1

9) Variabel basis di dalam tabel awal fase II adalah ….

A. X_1, x_2, x_3 C. X_2, x_3, x_4

B. X_2, x_3, x_5 D. X_1, x_2, x_5

10) Nilai minimum Z adalah ….

A. 1 C. 3

B. 4 D. 6

BAB V

PRIMAL DAN DUAL

PENDAHULUAN

Setiap masalah program linear yang bertujuan mencari nilai maksimum selalu bertalian dengan suatu masalah program linear dengan tujuan mencari nilai masksimum, yang disebut dual masalah yang pertama. Sebaliknya setiap masalah program linear bertujuan mencari nilai minimum selalu bertalian dengan suatu masalah program linear yang bertujuan mencari nilai maksimum yang disebut dual. Masalah pertama disebut primal sedangkan masalah kedua dengan tujuan berlawanan, disebut dual.

A. MATRIKS KOEFISIEN DARI PRIMAL DAN DUAL

Untuk memperoleh gambaran yang jelas tentang masalah primal dengan masalah dual-nya, kita sajikan model matematika dari kdua masalah yang merupakan primal-dual masing-masing. Perhatikan dua model berikut ini.

*) Masalah Maksimum

Maksimumkan $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m$

Syarat:

$$A_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \leq b_1$$

$$A_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m \leq b_2$$

$$\dots \qquad \dots \quad \dots. \quad \dots. \quad \dots$$

$$A_{k1}x_1 + a_{21}y_2 + \dots a_{km}x_m \leq b_k$$

$$\text{Dan } x_1, x_2, \dots x_m \geq 0$$

**) Masalah Minimum

Minimumkan $g = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_ky_k$

Syarat:

$$A_{11}\, y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{k1}y_k \geq c_1$$

$$A_{12}\, y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{k2}y_k \geq c_2$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots. \qquad \dots. \qquad \dots$$

$$A_{1m}\, y_1 + a_{2m}y_2 + \dots + a_{km}y_k \geq c_m$$

$$Y_1, y_2, \dots. Y_k \geq 0$$

Jika masalah *) kita anggap sebagai primal maka masalah **) asdalah dualnya. Jika masalah **) kita tentukan sebagai primal, maka masalah *) adalah dualnya.

Koefisien-koefisien dari masalah *) akan membentuk suatu matriks yang kita sebut matriks *koefisien*, dinyatakan sebagai berikut.

*) Matriks Koefisien – persoalan Primal (Maksimum)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & & \\ A_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{km} & b_k \\ C_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_m & * \end{pmatrix}$$

Perhatikan masalah koefisien fungsi objektif tampil sebagai baris paling bawah!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{k1} & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{k2} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & & \\ A_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & \dots & a_{km} & c_m \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_k & * \end{pmatrix}$$

Jelas terlihat matriks koefisien masalah dual-nya ialah transpose dari matriks koefisien masalah primal.

Simentri antara Primal dan Dual

Simentri antara masalah primal dan dual dirangkum dan disajikan sebagai berikut.

$2x^*$	+	$4y^*$	$\geq$	40
X		x		x
+		+		+
$3x^*$	+	$2y^*$	$\geq$	50
Y		y		y

Minimumkan: $3x^* + 2{,}5y^*$

Jika dibaca secara horizontal, kita memiliki masalah menentukan nilai minimum sebagai primal. Jika dibaca secara vertikal, kita memiliki dual-nya yang merupakan masalah menentukan nilai maksimum. Sebaliknya dapat kita pertimbangkan masalah menentukan nilai maksimum sebagai primal dan menentukan nilai minimum sebagai dual. Perhatikan contoh berikut ini!

						Minimumkan
10.7x	+	5y	+	2z	$\leq$	2705
X*		x*		x*		x*
+		+		+		+
5,4x	+	10y	+	4z	$\leq$	2210
Y*		y*		y*		y*
+		+		+		+
0,7x	+	1y	+	2z	$\leq$	445
Z*		z*		z*		z*

Maksimumkan: $10x \quad + \quad 15y \quad + 20z$

Membaca secara horizontal diperoleh masalah menentukan nilai maksimum. Jika dibaca secara vertikal dualnya dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$10{,}7u + 5{,}4\,v + 0{,}7\,w \geq 10$$
$$5\,u + 10\,v + w \geq 15$$
$$2\,u + 4\,v + 2\,w \geq 20$$

Dengan fungsi objektif:

Minimumkan: $f = 2705\,u + 2210\,v + 445\,w$

Untuk memperoleh pengertian yang lebih mendalam tentang masalah primal-dual kita berikan contoh yang lebih nyata.

Contoh:

Sebuh perusahaan pakaian memiliki data sebagai berikut.

	Baju 1	Baju 2	Tersedia
Katun	2	1	16
Sutera	1	2	11
Tetoron	1	3	15
Harga	\$ 30	\$ 50	

Berapa banyak baju 1 dan baju 2 harus dibuat agar penghasilan maksimum?

Kita lakukan analisis terhadap masalah yang harus dibahas ini. Jika masalah ini kita anggap sebagai masalah primal maka tentukan matriks koefisiennya.

1. Matriks koefisien dari masalah primal adalah :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 16 \\ 1 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 15 \\ 30 & 50 & * \end{bmatrix}$$

2. Dual memiliki fungsi objektif sebagai berikut.

   F= 16u + 11v + 15w

3. Masalah dual memiliki matriks koefisien sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1\ 30 \\ 1 & 2 & 3\ 50 \\ 16 & 11 & 15\ * \end{bmatrix}$$

4. Masalah dual minimum dapat ditulis sebagai berikut.

   Minimumkan: $f = 16u + 11v + 15w$

   Syarat: $2u + v + w \geq 30$

   $U + 2v + 3w \geq 50$

   $U \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$

B. PENERAPAN PRIMAL DAN DUAL

Berkaitan dengan setiap masalah program linear yang kita sebut masalah primal, selalu terdapat masalah dual. Jika suatu perusahaan masalah primal adalah menentukan keuntungan maksimal, maka masalah menahan ongkos serendah mungkin dapat dipandang sebagai masalah dualnya. Arti dari primal-dual akan menjadi lebih jelas setelah anda mempelajari masalah kebutuhan akan vitamin yang merupakan penerapan dari primal-dual. Kasus mencari nilai minimum sebagai primal akan dijelaskan dengan sebuah masalah serupa dengan masalah "diet" yang sangat terkenal.

Marilah kita rumuskan sebuah masalah di mana seseorang memerlukan sejumlah vitamin tertentu dari setiap hari. Vitamin A dan B ditemukan dalam dua makanan yang berbeda M_1 dan M_2. Jumlah vitamin di setiap makanan, harga per unit dari setiap makanan, dan vitamin yang diperlukan setiap harinya diberikan oleh table berikut ini.

Vitamin	Makanan		Keperluan Sehari
	M_1	M_2	
A B	2 3	4 2	40 50
Harga Makanan/unit	3	2,5	

Data menunjukkan bahwa 1 unit M_1 mengandung 2 unit vitamin A dan 3 unit vitamin B, sedangkan 1 unit makanan M_2 mengandung 4 unit vitamin A dan 2 unit vitamin B. Keperluan akan vitamin A sehari paling sedikit 40 unit dan vitamin B sejumlah 50 unit. Tujuan kita ialah menentukan jumlah optimal dari makanan M_1 dan M_2 sehingga keperluan vitamin sehari dipenuhi dengan biaya serendah mungkin.

Misalkan bahwa untuk memenuhi tujuan ini dibeli x makanan M_1 dan sejumlah y makanan M_2. Masalah ini memiliki model matematika sebagai berikut

(*) Primal Minimumkan: $f = 3x + 2{,}5\ y$

Syarat: $2x + 4y \geq 40$

$3x + 2y \geq 50$

$X \geq 0,\ y \geq 0$

Matriks koefisien dari primal adalah ….

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 40 \\ 3 & 2 & 50 \\ 3 & 2{,}5 & * \end{bmatrix}$$

(**) Dual, matriks koefisien dari dual-nya adalah :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2{,}5 \\ 40 & 50 & * \end{bmatrix}$$

Masalah dualnya dapat ditulis sebagai berikut:

Maksimumkan: $g = 40u + 50v$

Syarat: $2u + 3v \leq 3$

$4u + 2v \leq 2{,}5$

$U \geq 0, v \geq 0$

Perlu diperhatikan bahwa setiap masalah program linear memiliki dual yang unik. Untuk contoh ini, baik primal maupun dualnya akan kita selesaikan dengan metode simpleks, kemudian akan dibandingkan kedua hasilnya.

(*) Penyelesaian Primal

Minimumkan: $f = 3x + 2{,}5\,y$

$2x + 4y \geq 40$

$3x + 2y \geq 50$

$X \geq 0, y \geq 0$

Model matematika untuk primal:

Minimumkan:$f = 3x + 2{,}5y + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$

$2x + 4y - S_1 + A_1 = 40$

$3X + 2Y - S_2 + A_2 = 50$

$X \geq 0, y \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, A_1 \geq 0, A_2 \geq 0$

Program asal dimulai dengan x, y, S_1 dan S_2 bernilai 0, ini berkaitan dengan $A_1 = 40$ dan $A_2 = 50$.

Program awal

Program	Biaya Per unit	kuantitas	3 x	2,5 y	0 S_1	0 S_2	M A_1	M A_2
A_1	M	40	2	4	-1	0	1	0
A_2	M	50	3	2	0	-1	0	1
Baris Penilaian			3-5	5/2-6M	M	M	0	0

Variabel Keluar

variabel Masuk

Nilai (2,5 – 6M) lebih negatif dari (3 – 5M), maka y adalah variabel yang harus masuk dengan mengeluarkan A_1. Program asal yang merupakan program 1 jelas belum optimal, dan program awal ini perlu diperbaiki. Setelah perbaikan sesuai aturan metode simpleks, diperoleh program 2.

Proogram 2

Program	Biaya Per unit	kuantitas	3 x	2,5 y	0 S_1	0 S_2	M A_1	M A_2
y	5/2	10	½	1	-1/4	0	¼	0
A_2	M	30	2	0	1/2	-1	-1/2	1
Baris Penilaian			$(\frac{7}{2} - 2M)$	0	$(\frac{5}{8} - \frac{M}{2})$	M	$(\frac{5}{8} - \frac{3M}{2})$	0

Baris Penilaian $(\frac{7}{2} - 2M)$ 0 $(\frac{5}{8} - \frac{M}{2})$M $(\frac{5}{8} - \frac{3M}{2})$ 0

Variabel Keluar variabel Masuk

Program 2 jelas belum optimal karena masih memiliki nilai negatif $\left(\frac{7}{4} - 2M\right)$

Dalam baris pernilaian. Perbaikan program akan melibatkan penggantian variabel A_2 oleh x. Penerapan langkah-langkah dalam metode simpleks memberikan program 3.

Program 3

Program	Biaya Per unit	Kuantitas	3 X	2,5 Y	0 S_1	0 S_2	M A_1	M A_2
Y	5/2	5/2	0	1	-3/8	¼	3/8	-1/4
x	3	15	1	0	1/4	-2/2	-1/4	1/2
Baris Penilaian			0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{8}$	M-$\frac{3}{16}$	M-$\frac{7}{8}$

Program 3 sudah merupakan program optimal, karena baris penilaian tidak memiliki nilai yang negatif lagi. Program optimal ini berkaitan dengan pembelian 15unit makanan M_1 dan 5/2 unit makanan M_2 sehari, dengan biaya f = 3 (15) + 2,5 (5/2) = 51,25 sen dolar.

(**) Penyelesaian Dual

Masalah dualnya dapat ditulis sebagai berikut.

Maksimumkan : $g = 40u + 50v$

Syarat : $2u + 3v \leq 3$

$4u + 2v \leq 2{,}5$

$U \geq 0, v \geq 0$

Masalah dualnya dipertimbangkan sebagai berikut. Makanan M_1 dan M_2 dijual di sebuh toko. Pemilik toko menyadari bahwa makanan M_1 dan M_2 memiliki nilai pasar karena mengundang vitamin A dan B yang diperlukan untuk kesehatan.

Masalah yang ia hadapi ialah menetukan harga jual, misalkan u sen. Dolar per unit vitamin A dan v sen dolar per unit vitamin B. 1a menyadari bahwa harga per unit vitaminnya harus diatur sedemikian rupa sehingga harga jual yang ditetapkan untuk kedua jenis makanan kurang atau sama dengan harga pasar. Dengan perkataan lain, terhadap u dan v harus ditentukan harga sehingga biaya yang dihitung untuk makanan M_1 dan M_2 kurang atau sama dengan 3 dan 2,5 sen dolar per unit, berturut-turut. Kalau pemilik toko menentapkan harga lebih tinggi dari 3 dan 2,5 sen dolar, ia akan kehilangan pelanggan. Pada saat yang bersamaan ia ingin memaksimumkan penghasilannya, yang diberikan oleh fungsi tujuan $g = 40u + 50v$, karena keperluan akan vitamin A dan B seharinya masing-masing adalah 40 unit dan 50 unit.

Masalah program linear (**) ini merupakan dual dari masalah aslinya,yang dikenal sebagai masalah primalnya. Kesimpulan yang perlu diperhatikan ialah bahwa masalah program linear memiliki dual yang unik masalah dual dari contoh ini dengan mudah dapat diselesaikan.

Program 1

Program	Koef Fungsi objektif	Besar variabel	40 u	50 v	0 S_1	0 S_2

S_1	0	3	2	3	1	0
S_2	0	2,5	4	2	0	1
Baris Penilaian			40	50	0	0

Variabel keluar variabel Masuk

Selama dalam baris penilaian masih terdapat nilai yang positif, berarti program belum optimal, dan program masih harus diperbaiki.

Program 2

Program	Koef.Fungsi objektif	Besar variabel	40 u	50 v	0 S_1	0 S_2
v	50	1	2/3	1	1/3	0
S_2	0	1/2	8/3	0	-2/3	1
Baris Penilaian			$6\frac{2}{3}$	0	$-16\frac{2}{3}$	0

Variabel Keluar Variabel Masuk

Baris penilaian memiliki nilai positif di bawah kolom variabel u, variabel u harus masuk dalam program mengeluarkan S_2.

Program 3

Program	Koef fungsi objektif	Besar Variabel	40 U	50 V	0 S_1	0 S_2

V	50	7/8	0	1	½	-1/4
u	40	3/16	1	0	-1/4	3/8

Baris Penilaian 0

Program 3 sudah optimal karena baris penilaian tidak memiliki nilai positif lagi. Pemilik toko harus menetapkan harga 3/16 sen dolar untuk vitamin A dan 7/8 sen dolar untuk vitamin B per unitnya. Nilai dari fungsi objektif adalah:

$$F = 40\left(\frac{3}{16}\right) + 50\left(\frac{7}{8}\right) = 51{,}25 \text{ sen dolar}$$

Yang memang tepat sama dengan jawaban yang diperoleh pada penyelsaian masalah primal.

Membandingkan Tabel Optimal Masalah Primal dan Dualnya.

Marilah kita tinjau sekarang tabel optimal dari masalah primal yang melibatkan pembelian makanan M_1 dan M_2, kemudian tabel optimal dualnya. Amatilah baik-baik fungsi objektif dari dua tabel optimal yang berkaiatan dengan primal-dualnya akan memberikan nilai yang sama:

Tabel optimal dan PRIMAL

Program	Biaya Per unit	Kuantitas	3 x	2,5 Y	0 S_1	0 S_2	M A_1	M A_2
Y	2,5	5/2	0	1	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$
x	3	15	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Baris penilaian:			0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{8}$	$M-\frac{3}{16}$	$M-\frac{7}{8}$

Tabel optimal dan DUAL-NYA

Program	Koef Fungsi Objektif	Besar Variabel	40 U	50 V	0 S_1	0 S_2
V	50	7/8	0	1	½	-1/4
U	40	3/16	1	0	-1/4	3/8

Baris penilaian: 0 0 -15 -5/2

Nilai fungsi objektif dari primal:

$$F = \frac{5}{2}(2{,}5) + 15\ (3) = 51{,}25 \text{ sen}$$

Nilai fungsi objektif dari dualnya:

$$F = \frac{7}{8}(50) + \frac{3}{16}(40) = 51{,}25 \text{ sen}$$

Maka penyelesaian dari masalah primal dalam program linear selalu dapat memberikan suatu penyelsaian untuk dualnya.

LATIHAN

Diberikan contoh masalah untuk Anda perhatikan dan telah selanjutnya:

Maksimumkan: $f = 3x + 5y + 2z$

$2x - y + 3z \leq$

$X + 2y + 4z \leq 8$

$X \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

1) Tentukan matriks koefisien dari masalah primal ini!
2) Tentukan matriks koefisien dari masalah dual!

3) Susunlah masalah dual, kerjakan dengan baik!
4) Tentukan fungsi objektif dari masalah dual!

Jika diberikan primal sebagai berikut, apa yang dapat Anda tentukan?

Minimumkan : $g = 2x + 6y + 7z$

Syarat : $x + 2y + 5z \geq 4$

$2x - y + 2z \geq 1$

$X \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

5) Tentukan matriks koefisien dari masalah primalnya!
6) Tentukan matriks koefisien dari masalah dualnya.
7) Susunlah masalah dualnya, kerjakan dengan baik!
8) Tentukan fungsi objektif dari masalah dualnya!

Diberikan suatu masalah menentukan nilai minimum sebagai masalah primal. Seseorang memerlukan 10, 12 dan 12 unit bahan kimia A, B, dan C brturut-turut untuk halamannya. Pupuk berupa cairan mengandung 5,2 dan 1 unit dari A, B dan C berturut-turut per botolnya, dan pupuk berupa serbuk mengundang 1,2 dan 4 unit dari A, B, dan C berturut-turut per kotak karton.

Harga pupuk cair \$3 per botol dan pupuk serbuk \$2 per kotak. Berapa pupuk dari masing-masing harus dibeli agar biaya serendah mungkin tetapi masih memenuhi persyaratan.

9) Susunlah tabel yang menunjukan data yang tersirat dalam masalah yang diberikan.
10) Buatlah suatu model matematika berdasarkan tabel pada soal (10 yang mencerminkan masalah yang dihadapi, yang disebut maslah primal!
11) Tentukan fungsi objektif dari masalah primal!

12) Susunlah matriks koefisien dari masalah primal!
13) Tentukan penyelsaian optimal dari masalah primal!
14) Tentukan matriks koefisien dari masalah dual!
15) Tentukan fungsi objektif dari masalah dualnya!
16) Susunlah masalah dualnya!

RANGKUMAN

1. Secara lebih khusus anda menyadari adanya masalah dual yang berkaitan dengan masalah primal yang anda hadapi.
2. Secara lebih khusus Anda menghayati adanya simentri antara primal dan dual
3. Anda akan mampu menentukan matriks koefisien dari masalah primal.
4. Anda akan mampu menentukan matriks koefisien dari masalah dualnya.
5. Anda bahkan mampu menyusun masalah dualnya.
6. Anda akan mampu pula menentukan fungsi objektif dari dualnya.
7. Secara lebih khusus anda menghayati penerapan masalah primal di bidang industri ataupun aplikasi di berbagai bidang.
8. Berlandasan masalah primal yang telah diterapkan di suatu bidang, anda mampu menelusuri masalah dual di bidang tersebut.
9. Anda menghayati bahwa untuk setiap masalah primal dalam perusahaan selalu terdapat masalah dual di perusahaan tersebut.

10. Anda menghayati bahwa untuk setiap masalah primal di bidang apa pun selalu terdapat dual yang unik.
11. Anda telah menyadari bahawa nilai fungsi objektif untuk masalah primal sama dengan nilai fungsi objektif untuk masalah dual.

UJI KOMPETENSI

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Tentukan masalah dual dari masalah primal berikut ini! Masalah primal adalah menentukan minimum:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 12 \\ 1 & 4 & 12 \\ 3 & 2 & * \end{pmatrix}$$

Jawaban yang benar adalah ….

A. Maksimumkan : $f = 3x + 2x$

Syarat: $5x + y \leq 10$

$2x + 2y \leq 12$

$X + 2y \leq 12$

$X \geq 0, y \geq 0$

B. Maksimumkan: $f = 10u + 12v + 12w$

Syarat: $5u + 2v + w \leq 3$

$U + 2v + 4w \leq 2$

$U \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$

C. Minimumkan: $f = 3x + 2y$

Syarat: $5x + 2y + z \geq 3$

$X + 2y + z \geq 2$

$X \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

D. Maksimumkan: $f = 10u + 12v + 12w$

Syarat: $u + 2v + 4w \geq 3$

$5u + 2v + w \geq 2$

$U \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$

2) Tentukan dual dari masalah primal berikut ini.

Maksimumkan: $f = 5x - y + 2z$

Syarat: $7x + 2y - z \leq 8$

$X - 3y - 2z \geq 4$

$3x - y + 6z \leq 5$

$X \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Jawaban yang benar adalah ….

A. Minimumkan: $f = 8u - 4v + 5w$

Syarat: $7u - v + 3w \geq 5$

$2u + 3v - w \leq 1$

$-u + 2v + 6w \geq 2$

$U \geq 0, v \geq 0, z \geq 0$

B. Minimumkan: $f = 8u + 4v + 5w$

Syarat: $7u - v + 3w \geq 5$

$U - 3v - 2w \leq 1$

$-u + 2v + 6w \geq 2$

$U \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$

C. Minimumkan: $f = 5u + v + 2w$

Syarat: $7u - v + 3w \geq 5$

$2u + 3v - w > -1$

$-u + 2v + 6w \geq 2$

$U \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$

D. Minimumkan: $f = 8u - 4v + 5w$

Syarat: $7u - v + 3w \geq 5$

$2u + 3v - w \geq -1$

$-u + 2v + 6w \geq 2$

$U \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$

3) Tentukan dual dari masalah primal berikut ini.

Minimumkan: $g = 2r + 5s + t$

Syarat: $9r - 3s + 5t \geq 7$

$6r - 4s - 3t \leq 2$

$R \geq 0, s \geq 0, t \geq 0$

Jawaban yang benar adalah ….

A. Maksimumkan: $f = 7u - 2v$

Syarat: $9u - 6v \leq 2$

$-3u + 4v \geq 5$

$5u + 3v \leq 1$

$U \geq 0, v \geq 0$

B. Maksimumkan: $f= -2u + 7v$

Syarat: $9u - 6v \geq 2$

$-3 + 4v \leq 5$

$5u + 3v \geq 1$

$U \geq 0, v \geq 0$

C. Maksimumkan: $f = 7u - 2v$

Syarat: $9u - 6v \leq 2$

$-3u + 4v \leq 5$

$5u + 3v \leq 1$

$U \geq 0, v \geq 0$

D. Maksimumkan: $f= 2x + 5y + 2$

Syarat: $9x - 3y + 5z \leq 7$

$-6x + 4y + 3z \leq -2$

$X \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

4) Tetentukan dual dari masalah primal berukut ini.

Maksimumkan: $f = 3x + 2y - 2z$

Syarat: $4x + 3y - 2z \leq 11$

$5x - 2y + 7z \geq 2$

$X + y + 3z \leq 15$

$X \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Jawaban yang benar adalah …..

A. Minimumkan: $g = 11u - 2v + 15w$

Syarat: $4u - 5v + w \geq 3$

$3u + 2v + w \geq 2$

$-2u - 7v + 3w \geq -2$

$U \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$

B. Minimumkan: $g = 11u - 2v + 15w$

Syarat: $4u - 5v + w \geq 3$

$3u + 2v + w \leq 2$

$2u + 7v - 3w \geq 2$

$U \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$

C. Minimumkan: $g= 3u + 2v - 2w$

Syarat: $4u + 3v - 2w \geq 11$

$-5u + 2v - 7w \geq -2$

$U + v + 3w \geq 15$

$U \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$

D. Minimumkan: $g = 3u + 2v + 2w$

Syarat: $4u + 3v - 2w \leq 11$

$-5u + 2v - 7w \leq 2$

$U + v + 3w \leq 15$

$U \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$

5) Tentukan dual dari masalah primal berukut ini.

Maksimumkan: $f = 5x - 2y + 3z$

Syarat: $3x - 4y + 2z \leq 9$

$2x + 7y + 5z \leq 11$

$X \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Jawaban yang benar adalah …..

A. Minimumkan : $g = 9u + 11v$

Syarat: $3u + 2v \geq 5$

$-4u + 7v \geq -2$

$2u + 5v \geq 3$

$U \geq 0, v \geq 0$

B. Minimumkan: $g = 5u - 2v + 3w$

Syarat: $3u - 4v + 2w \geq 9$

$2u + 7v + 5w \geq 11$

$U \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$

C. Minimumkan: $g = 9u + 11v$

Syarat: $3u + 2v \geq 5$

$4u - 7v \geq 2$

$2u + 5v \geq 3$

$U \geq 0, v \geq 0$

D. Minimumkan: $g = 5u - 2v + 3w$

Syarat: $3u + 4v - 2w \geq 9$

$2u - 7v + 5w \geq 11$

$U \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$

6) Suatu masalah primal diberikan sebagai berikut:

Maksimumkan: $f = 4x - 2y - z$

Syarat: $x + y = z \leq 3$

$2x + 2y + z \leq 4$

$X - y \leq 0$

$X \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Matriks koefisien masalah dual-nya adalah ….

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & * \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & * \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & * \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & * \end{pmatrix}$

7) Suatu masalah primal diberikan sebagai berikut:

Minimumkan: $g = 4x + 5y + z$

Syarat: $x + y + z \geq 3$

$2x + 2y - z \geq 2$

$X + 2y \geq 4$

$X \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

Matriks koefisien dari masalah dualnya adalah ….

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & * \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & * \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & * \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

1	-1	0	1
3	2	4	*

8) Diberikan masalah primal berikut

Minimumkabn: $g = r + 7s + 2t$

Syarat: $7r + 3s + 5t \geq 9$

$4r + 8s - t \leq 10$

$R \geq 0, s \geq 0, t \geq 0$

Masalah dualnya adalah ….

A. Maksimumkan: $f = 9x + 10y$

Syarat: $7x - 4y \leq 1$

$3x - 8y \leq 7$

$5x - y \leq 2$

$X \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

B. Maksimumkan: $f = 9x - 10y$

Syarat: $7x - 4y \leq 1$

$3x - 8y \leq 7$

$5x + y \leq 2$

$X \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

C. Maksimumkan: $f = 9x - 10y$

Syarat: $7x - 4y \leq 1$

$3x + 8y \leq 7$

$5x + y \leq 2$

$X \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

D. Maksimumkan: $f = 9x - 10y$

Syarat: $7x - 4y \geq 1$

$3x - 8y \geq 7$

$5x + y \geq 2$

$X \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Diberikan masalah primal sebagai berikut: sebuh perusahaan memiliki dua kilang. Kilang A menghasilkan 1 ton premix, 3 ton premium dan 5 ton solar setiap harinya, dan kilang B menghasilkan 2 ton dari masing-masing jenis minyak setiap harinya. Perusahaan merupakan 80 ton premix, 160 ton premium dan 200 ton solar.Berapa hari setiap kilang harus bekerja, agar biaya serendah mungkin, tetapi masih tetap memenuhi keperluan. Biaya operasi kilang A maupun kilang B sebesar $ 200 seharinya.

11) Jika x menunjukan jumlah hari kilang A bekerja, dan y adalah jumlah hari kilang B bekerja maka persyaratan apa yang harus dipenuhi:

    Jawaban yang tepat adalah ….

    A. $X + 2y \leq 80$
       $3x + 2y \leq 160$
       $5x + 2y \leq 200$
       $X \geq 0, y \geq 0$
    B. $X + 3y + 5z \geq 200$
       $2x + 2y + 2z \geq 200$
       $X \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
    C. $X + 2y \geq 80$
       $3x + 2y \geq 160$
       $5x + 2y \geq 200$
       $X \geq 0, y \geq 0$
    D. $X + 2y = 80$
       $3x + 2y = 160$
       $5x + 2y = 200$

$X \geq 0, y \geq 0$

12) Tentukan fungsi objektif dari masalah primal tersebut ….
    - A. Maksimumkan : $f = 200x + 200y$
    - B. Minimumkan: $f = 80x + 160y + 200z$
    - C. Minimumkan: $f = 5x + 2y$
    - D. Minimumkan: $f = 200x + 200y$
13) Gambarlah daerah penyelesaian, kemudian tentukan titik-titik sudut daerah penyelesaian.

    Jawaban yang paling tepat ialah titik ….
    - A. P(0,100); Q(20,50); R(40,20); S(80,0)
    - B. P(0,80); Q(20,40); R(40,20); S(100,0)
    - C. P(0,60); Q(50,20); R(40,20); S(80,0)
    - D. P(0,100); Q(20,50); R(20,40); S(60,0)
14) Setelah dihitung nilai fungsi objektif di setiap titik, ternyata nilai minimum dicapai di titik ….
    - A. S(60,0)
    - B. R(40,20)
    - C. P(0,60)
    - D. Q(20,40)
15) Tetentukan matriks koefisien dari masalah primal tersebut. Jawaban yang benar ialah

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 80 \\ 3 & 2 & 160 \\ 5 & 2 & 200 \\ 200 & 200 & * \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 200 \\ 2 & 2 & 2 & 200 \\ 80 & 160 & 200 & * \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 80 & 200 \\ 3 & 2 & 160 & 200 \\ 5 & 2 & 200 & * \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 80 \\ 3 & 2 & 160 \\ 5 & 2 & 200 \end{pmatrix}$

16) Tetentukan fungsi objektif dari masalah dual. Jawaban yang benar ialah ….

A. Minimumkan : $g = 80u + 160v + 200w$

B. Maksimumkan : $g = 200u + 200v + 200v$

C. Maksimumkan : $g = 80u + 160v + 200w$

D. Maksimumkan : $g = 200u + 200v$

17) Susunlah masalah dual-nya. Jawaban yang benar ialah …

A. Maksimumkan : $g = 200u + 200v$

Syarat : $u = 2v \geq 80$

$3u + 2v \geq 160$

$5u + 2v \geq 200$

$U \geq 0, v \geq 0$

B. Maksimumkan : $g = 200u + 200v$

Syarat : $u = 2v \leq 80$

$3u + 2v \leq 160$

$5u + 2v \leq 200$

$U \geq 0, v \geq 0$

C. Maksimumkan : $g = 80u + 160v + 200w$

Syarat : $u + 3v + 5w \geq 200$

$2u + 2v + 2w \geq 200$

$U \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$

D. Maksimumkan : $g = 80u + 160v + 200w$

Syarat : $u + 3v + 5v \leq 200$

$2u + 2v + 2w \leq 200$

$U \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$

18) Gunakan metode simpleks untuk menentukan nilai optimal dari dual.

Jawaban yang tepat ialah ….

A. $ 14.000,-

B. $ 12.000,-

C. $ 10.000,-

D. $ 9.600,-

BAB VI

MODEL TRANSPORTASI (BAGIAN I)

A. PENDAHULUAN

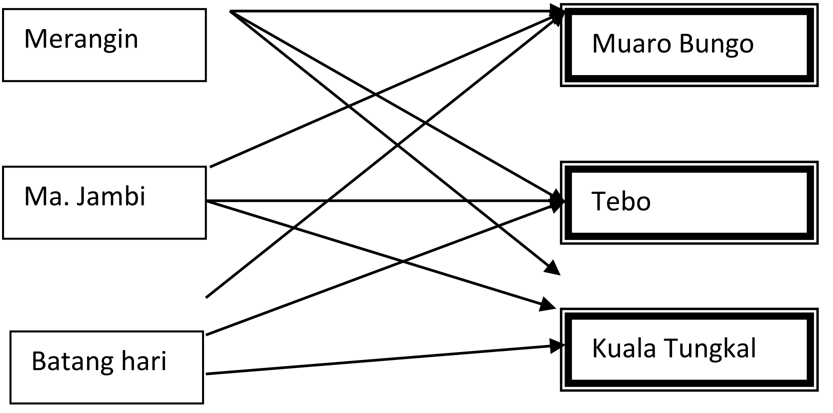
Model khusus program linier yang ditemukan dalam kehidupan nyata salah satunya adalah model angkutan (*transportation model*). Model transportasi merupakan persoalan program linear dengan tujuan untuk " mengangkut" barang tunggal dari berbagai asal (*origin*) ke berbagai tempat tujuan (*destiantion*), dengan biaya angkut serendah mungkin. Banyaknya barang yang tersedia di berbagai asal dan banyak barang yang diminta oleh berbagai tempat tujuan merupakan suatu model yang harus diselesaikan. Masalah biaya pengankutan dari satu unit barang dari tempat asal ketempat tujuan merupakan program yang harus dibuat agar pengirim optimal dan menghasilkan biaya pengiriman total yang minimum.

Model transportasi digunakan untuk mengatur distribusi dari sumber-sumber yang menyediakan produk yang sama ke tempat-tempat yang membutuhkan secara optimal dengan biaya yang termurah. Alokasi produk ini harus diatur sedemikian rupa karena terdapat perbedaan biaya-biaya alokasi dari satu sumber atau beberapa sumber ke tempat tujuan yang berbeda.

Contoh model transportasi sebagai berikut :

Misalkan suatu produk yang dihasilkan pada tiga pabrik sawit (sumber) harus didistribusikan ke tiga Agen penjulan (tujuan) seperti berikut :

Sumber (Pabrik) Tujuan (Agen Penjualan)



Persoalan model transportasi yang merupakan kasus-kasus persoalan program linear maka akan selalu dapat diselesaikan dengan metode simpleks. Tetapi " algoritma". Yang akan dikembangkan dalam bab ini, menyajikan cara yang lebih efesien untuk menangani persoalan tersebut.

B. ANALISIS MODEL TRANSPORTASI

Model transportasi ialah suatu kasus khusus persoalan program linear, maka berarti model transportasi akan memiliki ciri-ciri khas yang dimiliki pula oleh persoalan program linear, yaitu:

1. Fungsi objektif yang linear.

   $F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

2. Struktur persyaratan Linear.

Setiap persoalan program linear memiliki sekumpulan persyaratan linear berikut.

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \leq b_i \begin{cases} j = 1,2,\ldots,m \\ j = 1,2,\ldots n \end{cases}$$

Ketengan

a_{ij} : koefisien struktur yang berfungsi sebagai koefisien dari variabel struktur

b_i :konstanta yang menggambarkan kapasitas maksimum atau minimum fasilitas yang ada maupun sumber yang tersedia. Bentuk persyaratan struktur yang linear dituliskan secara lengkap sebagai berikut.

$$A_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}\,x_n \leq b_1$$

$$A_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$A_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}\,x_3 + \ldots + a_{mn}\,x_a \leq b_m$$

3. Persyaratan tidak negatif

Variabel struktur, variabel slack, variabel slack buatan persoalan program linear terbatas pada nilai tidak negatif, ditulis:

$X_j \geq 0$ $\qquad$ $j = 1, 2, \ldots, n$

$S_1 \geq 0$ $\qquad$ $I = 1, 2, \ldots, m$

$A_i \geq 0$

Khususnya, persoalan program linear dapat sudut pandang menjadi persoalan "Transportasi" jika:

1. Koefisien variabel struktur, yaitu a_{ij} tersebut pada nilai 0 atau 1.
2. Terdapat kehomogenan antara unit dalam persyaratan.

Contoh :

Sebuah perusahaan memiliki tiga pabrik di tiga kota yang berlainan, dan masing-masing menghasilkan barang yang sama. Hasil produksi 3 pabrik ini diserap oleh empat toko penjualan. Tiga pabrik ditandai dengan o_1, o_2 dan o_3, dan toko sebagai pelanggan ditandai dengan D_1, D_2, D_3, D_4. Seperti yang tercantum pada Tabel 6.1

Seperti tercantum pada tabel, matriks dari persoalan transportasi memiliki 3 baris dan 4 kolom sehingga tidak merupakan matriksbujur sangkar. Ini memberikan kesan, dalam persoalan transportasi, suatu asal tertentu dapat secara simultan mengirimkan barang kepada lebih dari satu tempat tujuan.

Tabel 6.1

(asal) origin	Destination				Kapasitas
	d_1	d_2	d_3	d_4	
O_1	X_{11} $\boxed{C_{11}}$	X_1 $\boxed{C_{12}}$	X_1 $\boxed{C_{13}}$	X_1 $\boxed{C_{14}}$	b_1
O_2	X_{21} $\boxed{C_{21}}$	X_2 $\boxed{C_{22}}$	X_2 $\boxed{C_{23}}$	X_2 $\boxed{C_{24}}$	b_2
O_3	X_{31} $\boxed{C_{31}}$	X_3 $\boxed{C_{32}}$	X_3 $\boxed{C_{33}}$	X_3 $\boxed{C_{34}}$	b_3
Permintaan	d_1	d_2	d_3	d_4	

C_{ij} = biaya pengangkutan satu unit barang dari asal I ke tujuan j.

X_{ij} = banyak unit barang yang diangkut dari asal I ke tujuan j.

Misalkan $\sum b_i \sum d_j$

Harap diperhatikan, subskrip pertama di setiap simbol menunjukan asal tertentu dan subskrip kedua menunjukan tujuan tertentu. Misalkan c_{12} ialah biaya pengangkutan 1 unit barang dari O_1 ke D_2, dan variabel x_{34} ialah banyak unit barang yang diangkut dari O_3 dan D_4.

Kapasitas tempat asal (orgin) dan permintaan tempat tujuan diberikan di tepi tabel dan lazim disebut "RIM REQUIREMENT" atau " persyaratan samping".

Persoalan yang hadapi ialah memiliki siasat pengiriman (pengangkutan) yang akan memenuhi persyaratan samping dengan biaya total yang minimum.

1. Analisis Persoalan

Persoalan transportasi, seperti persoalan program linear, terdiri atas tiga komponen.

Pertama, merumuskan suatu fungsi objektif yang linear, yang harus ditentukan nilai minimumnya. Fungsi ini akan mewakili biaya total pengiriman dari semua barang yang harus dikirim dari tempat-tempat asal ke tempat-tempat tujuan.

Kedua, sekumpulan persyaratan struktur yang linear. Persoalan ini memiliki tujuh persyaratan, tiga diantaranya (satu untuk setiap baris). Memberikan hubungan antara kapasitas tempat asal dan barang yang harus diterima oleh berbagai temapat tujuan. Ini disebut "persyaratan kapasitas". Empat persyaratan lain(satu untuk setiap kolom) menunjukan hubungan antara permintaan berbagai temapat tujuan dan barang yang akan dikirim oleh berbagai tempat asal. Ini disebut " persyaratan permintaan ".

Ketiga, dapat ditentukan persyaratan tidak negatif untuk variabel struktur x_{ij} . Pernyataan ini menandakan, pengiriman negatif tidak dapat dibenarkan.

Ketiga komponen persoalan transportasi ditampilkan sebagai berikut.

Minimumkan:

$F(x) = c_{11} x_{11} + c_{12}x_2 + c_{13} x_{13} + c_{14} x_{14} + c_{21} x_{21} + c_{22} x_{22} + c_{23} x_{23} + c_{24} x_{24} + c_{31} x_{31} + c_{32} x_{32} + c_{33} x_{33} + c_{34} x_{34}$.

Syarat:

$X_{11} = x_{12} + x_{13} + x_{14} = b_i$

$X_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = b_2$

$X_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = b_3$

$X_{11} + x_{21} + x_{31} = d_1$

$X_{12}+ x_{22} + x_{32} = d_2$

$X_{13} + x_{23} + x_{33} = d_3$

$X_{14} + x_{24} + x_{34} = d_4$

Dan $x_{ij} \geq 0$; I = 1, 2, 3 dan j = 1, 2, 3, 4

Secara mudah dan sederhana, persoalan ini dapat diselesaikan dengan " MODEL TRANSPORTASI". Sebelum diuraikan metode transportasi, pertama dibahas beberapa karakteristik tertentu dari suatu pesoalan transportasi beserta penyelesaiannya.

$$\sum_{i=1}^{3} b_1 = \sum_{j=1}^{3} d_j$$

Maka setiap penyelesaian yang memenuhi enam dari tujuh persyaratan, dengan sendirinya akan memenuhi persyaratan terakhir.

Karena itu, jika m ialah banyak baris dan n ialah banyak kolom dalam suatu persoalan transportasi, persoalan secara lengkap dinyatakan dengan m + n – 1 persamaan. Ini berarti, suatu penyelsaian dasar yang memenuhi persyaratan suatu persoalan transportasi hanya memiliki m + n – 1 komponen positif.

Jika persyaratan banyak kapasitas temapat asal dan banyak permintaan tempat tujuan dipenuhi maka akan selalu mungkin untuk menyusun suatu penyelesaian daar yang awal dan memenuhi persyaratan demikian hingga semua persyaratan tepi (RIM) dipenuhi. Ini dapat dilakukan dengan metode yang telah disiapkan untuk keperluan tersebut, yaitu:

a. Metode NWC (North West Corner)/aturan Sudut Barat Laut (SBL)
b. Metode VAM (Vogel Approximation Method**)**
c. Metode INSPEKSI/C_{ij} terkecil

2. Pendekatan Metode Transportasi

Metode Transportasi Terdiri atas tiga Langkah Dasar

Langkah pertama, melibatkan penentuan pengiriman awal, demikan sehingga diperoleh penyelesaian dasar yang memenuhi syarat. Ini berarti, (m + n – 1) sel atau rute matriks transportasi digunakan untuk tujuan pengangkutan. Sel yang digunakan untuk pengangkutan disebut "sel kosong".

Langkah kedua, bertujuan menentukan, biaya "kesempatan" (*opporartunity*) yang berkaitan dengan sel kosong. Biaya "kesempatan"sel kosong dapat dihitung untuk tiap-tiap sel kosong tersendiri, atau dihitung untuk semua sel kosong secara keseluruhan. Jika biaya "kesempatan semua sel kosong tidak positif maka penyelesaian optimal telah diperoleh. Di lain pihak, jika hanya satu sel saja memiliki biaya kesempatan pihak "bernilai positif, penyelesaian pasti belum optimal dan harus melangkah lain ke langkah tiga.

Langkah tiga, melibatkan penentuan penyelesaian dasar yang memenuhi syarat, baru dan lebih baik. Sekali penyelesaian dasar yang baru dan memenuhi syarat telah dicapai, ulangi langkah 2 dan langkah 3 sampai suatu penyelesaian optimal telah ditentukan.

C. Langkah Pertama Metode Transportasi

Langkah pertama dalam metode transportasi terdiri atas penentuan penetapan awal program pengangkutan ini, demikian sehingga tercapai suatu penyelesaian dasar yang memenuhi syarat (banyaknya sel yang tersisi m + n – 1). Tersedia berbagai metode untuk menentukan program awal tersebut, Akan dibicarakan tiga metode dalam penanganan langkah pertama dalam persoalan transportasi.

1. Metode NWC (North West Corner) / SBL (Sudut Barat Laut)

Metode ini sesuai namanya North West Corner (VAM)/sudut Barat Laut (SBL) yang berarti penempatan pertama dilakukan dari sudur kiri atas (X_{11}) lalu mengisi sebelah kanan (baris atau kebawah (kolom) yang tergantung mana yang belum cukup kapasitas atau permintaan.

Jika alokasi pertama memenuhi permintaan tempat tujuan di kolom pertama, kemudian bergerak ke kanan di baris pertama dan kemudian menentukan alokasi kedua yang memenuhi kapasitas tersisa dari baris satu atau memenuhi permintaan tujuan dari kolom 2, dan seterusnya. Dengan cara ini, dimulai dari sudut paling kiri dan palingv atas matriks transportasi, memenuhi permintaan tujuan dan kapasitas tempat asal sekaligus, bergerak ke sel sebelah kanan yang lebih rendah sehingga tercapai persyaratan "RIM".

Contoh 6.1

Perhatian tabel 6.2 berikut:

Tabel 6.2

	DESTINATION (TEMPAT TUJUAN)					KAPA-SITAS
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	12	4	9	5	9	55
O_2	8	1	6	6	7	45
O_3	1	12	4	7	7	30
O_4	10	15	6	9	1	50
PERMIN-TAAN	40	20	50	30	40	

Harap diperhatikan, jika mengikuti aturan NWC/SBL, waktu menentukan program awal, biaya yang relevan tiap-tiap *route* tidak/belum diperhatikan.

Tabel 6.2 yang menggunakkan metode NWC/SBL mengharuskan sel O_1D_1, yang terletak di sudut kiri atas diisi. Al0kasi ditetapkan $x_{11} = 40$ untuk memenuhi permintaan tujuan yang ternyata lebih kecil dari kapasitas O_1. Ini berarti, permintaan tujuan $D_1 = 40$ dipenuhi. Tetapi O_1 masih memiliki (55 – 40) = 15 unit kapasitas yang belum disalurkan.

Tabel 6.3

	DESTINATION					KAPASITAS
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	40 12	4	9	5	9	55
O_2	8	1	6	6	7	45
O_3	1	12	4	7	7	30
O_4	10	15	6	9	1	50
PERMINTAAN	40	20	50	30	40	180 / 180

Maka kita bergerak ke kanan ke O_1D_2 di baris pertama. Telah diketahui 15 unit kapasitas O_1 belum terpakai maka 15 unit dikirimkan seluruhnya ke D_2, sehingga sel O_1D_2 Disisi 15 unit. Kapasitas O_1 habis terangkut

Tabel 6.4

	DESTINATION					KAPASITAS
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	12 40	15 4	9	5	9	55
O_2	8	1	6	6	7	45
O_3	1	12	4	7	7	30
O_4	10	15	6	9	1	50
PERMINTAAN	40	20	50	30	40	180 / 180

Namun, kolom D_2 masih memerlukan 5 atau (20-15) unit untuk memenuhi kebutuhan. Bergerak ke bawah menyusur kolom D_2 dan melengkapi 5 unit dari kapasitas 0_2, dan diletakan 5 unit di O_2D_2

Tabel 6.5

	DESTINATION					KAPASITAS
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	40 1	15 4	9	5	9	55
O_2	8	5 1	6	6	7	45
O_3	1	12	4	7	7	30
O_4	10	15	6	9	1	50
PERMINTAAN	40	20	50	30	40	180 / 180

Ini mengakibatkan 40 unit dari kapasitas O_2 yang belum terpakai, dan bergerak ke D_3, dan diletakan 40 di sel O_2D_3.

Tabel 6.6

	DESTINATION					KAPASITAS
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	40 2	15 4	9	5	9	55
O_2	8	5 1	40 6	6	7	45
O_3	1	12	4	7	7	30
O_4	10	15	6	9	1	50
PERMINTAAN	40	20	50	30	40	180 / 180

Permintaan 10 atau (50-40) unit untuk O_3 dipenuhi dari O_3, diletakan 10 unit di sel O_3D_3.

Tabel 6.7

	DESTINATION					KAPASITAS
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	2 (40)	4 (15)	9	5	9	55
O_2	8	1 (5)	6 (40)	6	7	45
O_3	1	12	4 (10)	7	7	30
O_4	10	15	6	9	1	50
PERMINTAAN	40	20	50	30	40	180 / 180

Kapasitas O_3 masih tersisa 30-10 = 20 unit dan ini diangkut ke D_4, diletakan 20 unit di sel O_3D_4.

Tabel 6.8

	DESTINATION					KAPASITAS
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	1 (40)	4 (15)	9	5	9	55
O_2	8	1 (5)	6 (40)	6	7	45
O_3	1	12	4 (10)	7 (20)	7	30
O_4	10	15	6	9	1	50
PERMINTAAN	40	20	50	30	40	180 / 180

Keperluan D_4 masih kurang 10 unit dan ini diambil dari kapasitas O_4. Pada sel O_4D_3 di isi 10 sehingga D_4 terpenuhi.

Tabel 6.9

	DESTINATION					KAPASITAS
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	40 1	15 4	9	5	9	55
O_2	8	5 1	40 6	6	7	45
O_3	1	12	10 4	20 7	7	30
O_4	10	15	6	10 9	1	50
PERMINTAAN	40	20	50	30	40	180 / 180

Kapasitas O_4 masih tersisa 50-10 = 40 unit dan ini diletakan di sel O_4D_3. Diletakkan 20 unit di sel O_4D_4 Sehingga sel O_4D_4 terpenuhi.

Tabel 6.10

	DESTINATION					KAPASITAS
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	40 1	15 4	9	5	9	55
O_2	8	5 1	40 6	6	7	45
O_3	1	12	10 4	20 7	7	30
O_4	10	15	6	10 9	40 1	50
PERMINTAAN	40	20	50	30	40	180 / 180

Program awal sudah telah ditentukan, tetapi masih perlu apakah persyaratan dipenuhi m+n-1 sel harus terisi.

$$M + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$$

Dari tabel 6.10 terlihat ada 8 sel yang terisi, maka penyelesaian tidak "merosot". Biaya total dari penempatan ini ialah.

40(12) + 15(4) + 5(1) + 40(6) + 10(4) + 20(7) + 10(9) + 40(1) = 1905

Sebuah penyelesaian dasar yang memenuhi syarat dan tidak merosot telah diperoleh dengan biaya transportasi sejumlah $1905.

Tetapi biaya ini belum tentu optimal, dan untuk menetukan biaya optimal diperlukan langkah dua yang masih harus dipelajari.

2. Metode VAM (Vogel Approximation Method)

Metode ini merupakan penetapan satu sel yang akan diisi berdasarkan pada perbedaan baris dan perbedaan kolom. Adupun langkahnya adalah

a. Dihitung selisih dari dua ongkos atau biaya termurah (c_{ij}) dari setiap baris dan kolom
b. Diantara selisih-selisih semua baris dan kolom, pilih yang terbesar yang akan menunjukkan kepada baris atau kolom yang dipilih.
c. Dalam kolom atau baris yang tepilih, pilih sel dengan ongkos atau biaya termurah (dengan c_{ij} yang terkecil) itulah sel yang harus di isi pada tahap tersebut.
d. Baris atau kolom yang sudah terpenuhi maka di hapus dan lanjut pada tahap penentuan beda baris atau kolom, sampai selesai.

Contoh

Soal diambil dari contoh 6.1

Tabel 6.11

	DESTINATION					KAPA SITAS
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	12	4	9	5	9	55
O_2	8	1	6	6	7	45
O_3	1	12	4	7	7	30
O_4	10	15	6	9	1	50
PERMIN TAAN	40	20	50	30	40	180 / 180

Penyelesaian dengan metode VAM

Langkah pertama adalah menentukkan selisih baris dan kolom adupaun selisih baris adalah dua ongkos termurah (c_{ij} terkecil) yaitu: baris O_1= 5 - 4 =1, baris O_2 =6 – 1=5, baris O_3 = 4-1 = 3, baris O_4 = 6-1 = 5. Kemudian pada kolom yaitu kolom D_1 = 8 – 1= 7, kolom D_2 = 4 – 1= 3, kolom D_3 = 6 – 4= 7, kolom D_4 = 6 – 5= 1, dan kolom D_5 = 7– 1= 5.

Langkah kedua menentukan selisih-selih dari baris atau kolom yang memiliki nilai beda terbesar, dari data di dapat kolom D_1 = 8 – 1= 7, sehingga kolom ini menjadi kolom yang terpilih. Seprti yang terlihat pada tabel 6.11.

Menentukan sel yang di isi dengan melihat ongkos tauan biaya yang termurah c_{ij}. Biaya atau ongkos yang paling murah adalah sel 0_3d_1 dengan ongkos 1. Seperti pada tabel 12.

	DESTINATION					Perbe-daan Baris
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	12	4	9	5	9	1
O_2	8	1	6	6	7	5
O_3	1	12	4	7	7	3
O_4	10	15	6	9	1	5
Perbe-daan Kolom	7*	3	2	1	6	

Tabel 6.11

Tabel 6.11a

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	KAPA SITAS
O_1	12	4	9	5	9	55
O_2	8	1	6	6	7	45
O_3	30 1	12	4	7	7	~~30~~ 0
O_4	10	15	6	9	1	50
PERMINTA AN	~~40~~ 10	20	50	30	40	

Sehingga baris O_3 yang telah memiliki kapasitas terpenuhi maka baris ini dihapuskan. Kemudian lagi kembali lagi kelangkah satu, kedua dan ketiga, begitu selanjutnya sehingga perbedaan kolom dan baris adalah seperti pada tabel 6.13

Tabel 6.12

	DESTINATION					Perbedaan Baris
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	$\boxed{12}$	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	1
O_2	$\boxed{8}$	$\boxed{1}$	$\boxed{6}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	5
O_4	$\boxed{10}$	$\boxed{15}$	$\boxed{6}$	$\boxed{9}$	$\boxed{1}$	5
Perbedaan Kolom	2	3	0	1	6	

Tabel 6.12a

	DESTINATION					Kapasitas
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	$\boxed{12}$	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	55
O_2	$\boxed{8}$	$\boxed{1}$	$\boxed{6}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	45
O_4	$\boxed{10}$	$\boxed{15}$	$\boxed{6}$	$\boxed{9}$	$\boxed{1}$	~~50~~ 10
Permintaan	10	20	50	30	~~40~~ 0	

Tabel 6.13

	DESTINATION				Perbedaan Baris
	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	12	4	9	5	1
O_2	8	1	6	6	5*
O_4	10	15	6	9	3
Perbedaan Kolom	2	3	0	1	

Tabel 6.13a

	DESTINATION				Kapasitas
	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	12	4	9	5	55
O_2	8	1	6	6	~~45~~ 25
O_4	10	15	6	9	10
Permitaaan	10	~~20~~ 0	50	30	

Tabel 6.14

	D_1	D_3	D_4	PERBEDAAN KOLOM
O_1	12	9	9	* 4
O_2	8	6	6	0
O_4	10	6	9	3
PERBEDAAN BARIS	2	0	1	

Tabel 6.14a

	D_1	D_3	D_4	KAPASITAS
O_1	12	9	5 30	~~55~~ 25
O_2	8	6	6	25
O_4	10	6	9	10
PERMINTAAN	10	50	~~30~~ 0	

Tabel 6.15

	D_1	D_3	PERBEDAAN KOLOM
O_1	12	9	3
O_2	8	6	2
O_4	10	6	*4
PERBEDAAN BARIS	2	0	

Tabel 6.15a

	D_1	D_3	KAPASITAS
O_1	12	9	25
O_2	8	6	25
O_4	10	6 40	~~10~~ 0
PERMINTAAN	10	~~50~~ 40	

Tabel 6.16

	D_1	D_3	PERBEDAAN KOLOM
O_1	12	9	3
O_2	8	6	2
PERBEDAAN BARIS	4*	3	

Tabel 6.16a

	D_1	D_3	KAPASITAS
O_1	12	9	25
O_2	10 8	6	~~25~~ 15
PERMINTAAN	~~10~~ 0	40	

Tabel 6.16b

	D_3	PERBEDAAN KOLOM
O_1	25 9	25
O_2	15 6	15
PERBEDAAN BARIS	40	

Mekanisme untuk memperoleh program awal persoalan transportasi ini dapat diikuti mulai tabel 6.11 hingga tabel 6.16b. Pada tabel 6.11 beda yang terbesar adalah 7 dan letak di bawah kolom D_1. Sel O_3 D_1 harus diisi, dan diisi 30 unit, dan D_1 masih memerlukan 40-30 = 10 unit. Ini berarti kapasitas O_3

sejumlah 30 unit telah terangkut dan baris O_3 dapat dicoret dari matriks transportasi. Kolom D_1 tak dapat dicoret karena masih memerlukan 10 unit lagi. Proses perhitungan dengan mencara beda kolom dan baris diulang sehingga akhirnya program awal sesuai tabel 6.17.

Tabel 6.17

ORIGIN (ASAL)	DESTINATION					TO-TAL
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	12	4	25 9	30 5	9	55
O_2	10 8	20 1	15 6	6	7	45
O_3	30 1	12	4	7	7	30
O_4	10	15	10 6	9	40 1	50
TOTAL	40	20	50	30	40	180 / 180

Banyak sel yang terisi m + n – 1 = 4 + 5 – 1 = 8.

Dari tabel 6.17 terlihat di peroleh 8 sel yang terisi. Ini berarti, penyelesaian awal ialah penyelesaian dasar yang memenuhi syarat, dan persoalannya tidak “merosot”.

Biaya total: 25(9) + 30(5) + 10(8) + 20(1) + 15(6) + 30(1) + 10(6) + 40(1) = \$695.

Jelas terlihat, biaya total yang diperoleh dengan metode VAM jauh lebih rendah daripada yang diperoleh dengan metode NWC.

3. Metode Inspeksi

Metode inspeksi adalah metode dengan mengambil urutan pengisian dari sel ongkos atau biaya yang paling murah, berarti dari c_{ij} terkecil. Sel dengan ongkos terendah atau termurah ini diisi sebanyak mungkin dengan mengingat persyaratan kapasitas awal (*origin*) maupun permintaan tempat tujuan. Kemudian beralih ke sel termurah berikutnya dan mengadakan alokasi dengan memperhatikan kapasitas yang tersisa dan permintaan baris dan kolom.

Jika terdapat "ikatan" antara sel termurah atau memilih seberang sel untuk diisi. Banyak sel yang terisi harus demikian hingga diperoleh m + n – 1 sel yang terisi.

Contoh3

Soal diambil dari contoh 1, selesai dengan menggunakan metode inspeksi!

Tabel 6.18

	DESTINATION					KAPASITAS
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	12	4	9	5	9	55
O_2	8	1	6	6	7	45
O_3	1	12	4	7	7	30
O_4	10	15	6	9	1	50
PERMINTAAN	40	20	50	30	40	180 / 180

Penyelesaian:

Penyelesaian dengan metode inpeksi dengan mengerjaka sel yang memiliki sel termurah, pada soal terlihat ada tiga sel yang termurah yaitu: sel O_3D_1, sel O_2D_2, dan sel O_4D_5 dengan nilai ongkos sebesar 1..

Dari tiga sel termurah di ambil secara sebarang, dan dipilih sel O_3D_1 untuk diisi dengan 30 unit. Ini berarti kapasitas O_3 telah diangkut seluruhnya, dan baris O_3 dapat dihapus dari matriks transportasi.

Tabel 6.18

	DESTINATION					KAPASITAS
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	12	4	9	5	9	55
O_2	8	1	6	6	7	45
O_3	30 1	12	4	7	7	~~30~~ 0
O_4	10	15	6	9	1	50
PERMINTAAN	~~40~~ 10	20	50	30	40	180 / 180

Untuk alokasi kedua terlihat adanya keterkaitan antara sel O_2D_2 dan sel O_4D_5. Dipilih sebarang dan O_4D_5 diisi dengan 40 unit, ini sepenuhnya mencukupi permintaan D_5, hingga kolom D_5 dapat dicoret.

Tabel 6.19

	DESTINATION					KAPASITAS
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	12	4	9	5	9	55
O_2	8	1	6	6	7	45
O_4	10	15	6	9	40 1	~~50~~

						10
PERMINTAAN	10	20	50	30	~~40~~ 0	150 150

Untuk alokasi ketiga, dicatat bahwa sel O_2D_2 adalah sel termurah, dan diberi alokasi 20 unit, sehingga kolom D_2 dapat dihapus

Tabel 6.20

	DESTINATION				KAPASITAS
	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	12	4	9	5	55
O_2	8	20 1	6	6	~~45~~ 25
O_4	10	15	6	9	10
PERMINTAAN	10	~~20~~ 0	50	30	110 110

Dari sel yang masih tersisa, sel O_1D_4 merupakan sel termurah dan diberi alokasi 30 unit, sehingga kolom D_4 dapat dihapus.

Tabel 6.21

	DESTINATION			KAPASITAS
	D_1	D_3	D_4	
O_1	12	9	30 5	~~55~~ 25

O_2	8	6	6	25
O_4	10	6	9	10
PERMINTAAN	10	50	~~30~~ 0	90 / 90

Alokasi kelima terlihat adanya "keterkaitan" antara sel O_2D_3 dan sel O_4D_3. Secara sebarang dipilih O_4D_3 dan diisi dengan 10 unit, dan baris O_4 dapat dihapus

Tabel 6.22

	DESTINATION		KAPASITAS
	D_1	D_3	
O_1	12	9	25
O_2	8	6	25
O_4	10	10 6	~~10~~ 0
PERMINTAAN	10	~~50~~ 40	60 / 60

Alokasi keenam terlihat sel O_2D_3 dan sel dipilih O_4D_3 dan diisi dengan 25 unit, dan baris O_2 dapat dihapus.

Tabel 6.23

	DESTINATION		KAPASITAS
	D_1	D_3	
O_1	12	9	25

O_2	8	(25) 6	~~25~~ 0
PERMINTAAN	10	~~40~~ 15	50 / 50

Alokasi ketujuh terlihat sel O_1D_3 yang terendah. dipilih O_1D_3 dan di isi dengan 15 unit, dan kolom D_3 dapat dihapus.

Tabel 6.24

	DESTINATION		KAPASITAS
	D_1	D_3	
O_1	12	(15) 9	~~25~~ 10
PERMINTAAN	10	~~15~~ 0	25 / 25

alokasi kedelapan yaitu sel $O_1D_{1,}$ sel O_1D_1 dan diisi dengan 10 unit, dan baris O_1 dan kolom D_1 dapat dihapus

Tabel 6.25

	DESTINATION	KAPASITAS
	D_1	
O_1	(10) 12	~~10~~ 0
PERMINTAAN	~~10~~ 0	0 / 0

Semua persyaratan "RIM" sekarang telah dipenuhi dan diperoleh penentuan awal, disajikan di tabel 6.26. Banyak sel yang terisi ada 8, yaitu m+n-1 = 4 + 5 – 1 = 8.

Tabel 6.26

	DESTINATION					
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	10 $\boxed{12}$	$\boxed{4}$	15 $\boxed{9}$	30 $\boxed{5}$	$\boxed{9}$	0
O_2	$\boxed{8}$	20 $\boxed{1}$	25 $\boxed{6}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	~~45~~ 0
O_3	30 $\boxed{1}$	$\boxed{12}$	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{7}$	~~30~~ 0
O_4	$\boxed{10}$	$\boxed{15}$	10 $\boxed{6}$	$\boxed{9}$	40 $\boxed{1}$	~~50~~ 0 ~~10~~
PERMINTAAN	~~40~~ 0	~~20~~ 0	~~50~~ ~~40~~ 0	30 0	~~40~~ 0	180 / 180

Biaya pengangkutan sebesar:

10(12) + 15(9) + 30(5) + 20(1) + 25(6) + 30(1) + 10(6) + 40(1) = 705

Biaya total ini hendaknya dibandingkan dengan biaya total yang dicapai dengan menggunakan metode NWC ($1905) dan metode VAM ($695).

Akan dirangkum kembali, pendekatan metode transportasi didasarkan atas tiga langkah:

1. Menentukan “program awal” untuk mencapai penyelesaian dasar yang memenuhi syarat.
2. Menentukan “biaya kesempatan” setiap sel kosong.
3. Memperbaiki Program yang sedang berjalan untuk memperoleh program yang lebih baik, hingga akhirnya mencapai penyelesaian optimal. Aplikasi langkah (2) dan (3) akan diuraikan di bab 7 berikutnya. Terdapat dua metode untuk mengembangkan langkah (2) dan (3). Satu disebut metode “STEPPING STONE” sedang satunya disebut metode “MODIFIED-DISTRIBUTION”, disingkat MODI.

LATIHAN

1) Apakah model transportasi tergolong model program linear? Apakah ciri khasnya?
2) Persoalan transportasi dapat diselesaikan dengan metode simpleks maupun dengan “algorita transportasi”, cara manakah yang lebih efesien? Jelaskan!
3) Apakah tujuan penyelesaian persoalan transportasi?
4) Langkah pertama menghasilkan program awal. Berapakah metode penyelesaian yang anda kenal sebagai langkah pertama?
5) Apakah yang anda ketahui tentang langkah kedua?
6) Metode apakah yang digunakan dalam langkah pertama dalam penyelesaian model transportasi?
7) Jelaskan metode NWC secara singkat!
8) Apakah yang dimaksud dengan perbedaan baris?
9) Apakah yang dimaksud dengan perbedaan kolom?

10) Jelaskan metode VAM secara singkat!
11) Jelaskan metode INSPEKSI secara singkat!
12) Metode apakah yang digunakan dalam langkah kedua?
13) Bila manakah suatu model transportasi disebut memenuhi syarat?
14) Dari tiga metode, yaitu NWC, VAM dan INSPEKSI metode manakah yang paling menguntungkan?
15) Bila manakah suatu program transportasi disebut optimal?

RANGKUMAN

1. Secara lebih khusus anda telah memahami model trasportasi dan mengenali ciri khas.
2. Anda telah megenali persyaratan yang harus dipenuhi agar model transportasi dapat diselesaikan.
3. Anda telah mampu menentukan fungsi objektif yang linear dalam model transportasi.
4. Anda telah mampu menggunakan aturan NWC, metode VAM dan metode INSPEKSI dalam penyusunan program awal.
5. Anda telah mampu melakukan langkah dua untuk menentukan *opportunity cost* setiap sel kosong dalam program awal.

6. Secara lebih khusus anda telah menghayati cara penyusunan program awal dalam penyelesaian persoalan transportasi.
7. Anda telah mampu menggunakan metode NWC dalam langkah pertama.

8. Anda telah mahir menggunakan VAM dalamlangkah pertama.
9. Anda telah mampu menggunakan INSPEKSI dalam langkah pertama.
10. Anda telah mampu menguji keoptimalan suatu program dalam model transportasi.

UJI KOMPETENSI

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Model Transportasi ialah model program linear juga dengan memiliki sifat ….
   A. C_{ij} bernilai 0 atau 1
   B. A_{ij} bernilai 0 atau 1
   C. X_{ij} bernilai sebarang
   D. Matriks transportasi ialah matriks bujur sangkar

2) Dalam "Model Transportasi", koefisien c_{ij} menentukan ….
   A. Biaya pengangkutan satu barang dari asal j ke tujuan i
   B. Banyak barang yang diangkut dari asal I ke tujuan j
   C. Biaya pengangkutan satu unit barang dari asal I ke tujuan j
   D. Menentukan persyaratan kapasitas I bertalian dengan permintaan j

3) Model transportasi memenuhi persyaratan ….

A. $\sum c_{ij} = \sum b_i$

B. $\sum c_{ij} = \sum \text{쨰}_j$

C. $\sum b_j < \sum d_j$

D. $\sum b_{ij} = \sum d_j$

4) Persyaratan tempat asal dan permintaan tempat tujuan dikenal sebagai persyaratan ….

A. “RIM”

B. “STRUKTURAL”

C. “OBJEKTIF”

D. “TIDAK NEGATIF”

5) Jika matriks transportasi memiliki m baris dan n kolom, maka persoalan trnsportasi dapat dinyatakan secara lengkap dengan ….

A. (m + n) persamaan

B. (m + n – 1) persamaan

C. (m + n + 1) persamaan

D. (m x n) persamaan

6) Aturan NWC (*North West Corner*) digunakan untuk menentukan ….

A. Penyelesaikan optimal

B. *Opportunity cost* sel kosong

C. Program awal

D. Persyaratan struktural yang linear

7) Suatu "Sel" dalam model transportasi disebut terisi jika ….

A. Sel digunakan sebagai route dalam pengiriman barang

B. Sel memiliki opportunity cost nol

C. Sel memenuhi persyaratan kapasitas tempat pengiriman

D. Sel memenuhi persayaratan permintaan tempat tujuan

8) Suatu penyelsaian persolan transportasi disebut optimal, jika ….

A. Semua sel dalam matriks transportasi terisi

B. *Opportunity cost* semua sel kosong bernilai nol

C. *Opportunity cost* semua sel kosong tidak negatif

D. *Opportunity cost* semua sel kosong tidak positif

9) Metode penyelesaian persoalan transportasi dengan meletakan alokasi pertama di sel yang memiliki ongkos termurah ialah metode …

A. NWC

B. INSPEKSI

C. VAM

D. MDI

10) Penyelesaian persoalan transportasi dapat dilanjutkan jika langkah pertama menghasilkan penyelesaian dasar yang memiliki sel tersisi sebanyak m + n – 1. Jka banyak sel

terisi kurang dari m + n – 1 maka penyelesaian dasar disebut ….

A. Dual

B. Optimal

C. Merosot

D. Terikat

Diberikan suatu persoalan transportasi dengan data sebagai berikut.

Dari \ Ke	Proyek A	Proyek B	Proyek C	Kapasitas Pabrik
Pabrik W	$\boxed{4}$	$\boxed{8}$	$\boxed{8}$	56
Pabrik X	$\boxed{16}$	$\boxed{24}$	$\boxed{16}$	82
Pabrik Y	$\boxed{8}$	$\boxed{16}$	$\boxed{24}$	77
Keperluan Proyek	72	102	41	215 \ 215

11) Ppenentuan penyelesaian dasar menggunakan aturan NWC menghasilkan alokasi ….

A. $O_1D_1 = 72$, $O_2D_2 = 82$, $O_3D_2 = 20$, $O_3D_3 = 41$

B. $O_1D_1 = 56$, $O_2D_1 = 16$, $O_2D_2 = 66$, $O_3D_2 = 36$ dan $O_3D_3 = 41$

C. $O_1D_1 = 56$, $O_2D_2 = 66$, $O_2D_3 = 16$, $O_3D_2 = 36$ $O_3D_3 = 17$

D. $O_1D_1 = 56$, $O_2D_2 = 16$, $O_2D_2 = 66$, $O_3D_2 = 40$

12) Penentuan penyelesaian dasar menggunakan aturan NWC menghasilkan biaya pengangkutan seharga ….

A. $3590

B. $3615

C. $3618

D. $3624

13) Penetuan penyelesaian dasar menggunakan aturan VAM menghasilkan alokasi ….

A. $O_1D_1 = 15$, $O_1D3 = 41$, $O_2D_2 = 82$, $O_3D_1 = 72$, $O_3D_2 = 5$

B. $O_1D_1 = 56$, $O_2D_1 = 16$, $O_2D_2 = 82$, $O_3D_1 = 72$, C. $O_3D_2 = 5$

C. $O_1D_2 = 56$, $O_2D_3= 41$, $O_2D_2 = 41$, $O_3D_1 = 72$,$O_3D_3 = 5$

D. $O_1D_2 = 15$, $O_1D_3 = 41$, $O_2D_2 = 82$, $O_3D_1 = 62$, $O_3D_2 = 5$

14) Penentuan penyelesaian dasar menggunakan aturan VAM menghasilkan biaya pengangkutan sebesar ….
    A. $2744
    B. $2093
    C. $2263
    D. $2275

15) Penentuan penyelesaian dasar menggunakan metode INSPEKSI menghasilkan alokasi ….
    A. $O_1D_1 = 56$, $O_3D_1 = 16$, $O_2D_2 = 41$, $O_3D_2 = 61$, $O_2D_2 = 41$
    B. $O_1D_1 = 56$, $O_2D_1 = 16$, $O_2D_2 = 41$, $O_3D_2 = 61$, $O_2D_3 = 41$
    C. $O_1D_2 = 56$, $O_2D_1 = 16$ $O_2D_2 = 41$, $O_2D_3 = 61$, $O_3D_3 = 41$
    D. $O_1D_2 = 56$, $O_2D_1 = 16$ $O_2D_2 = 41$, $O_2D_3 = 61$, $O_3D_3 = 41$

16) Penentuan penyelesaian dasar menggunakan metode "INSPEKSI" menghasilkan biaya pengangkutan sebesar ….
    A. $2965
    B. $2968
    C. $3055
    D. $3625

17) Setelah langkah pertama dalam penangan model transportasi dilakukan dengan menggunakan tiga metode,

yaitu NWC, VAM dan INSPEKSI, ternyata biaya terendah dihasilkan oleh metode….

A. MODI
B. NWC
C. INSPEKSI
D. VAM

18) Penentuan penyelesaian optimal dalam penyelesaian persoalan transportasi dapat dilakukan dengan ….

A. Metode VAM
B. Metode INSPEKSI
C. Aturan NWC
D. Langkah kedua

BAB VII

TRANSPORTASI (BAGIAN II)

A. PENDAHULUAN

Telah kita pelajari dalam modul 7 bahwa penyelesaian model transportasi didasarkan atas tiga langkah. Langkah pertama yang memiliki tiga metode, yaitu aturan NWC, metode VAM, dan metode INSPEKSI merupakan upaya untuk memperoleh solusi dasar yang memenuhi syarat. Ketiga metode ini menghasilkan total biaya pengangkutan yang tidak sama, tetapi tidak satu pun di antaranya tiga metode tersebut menghasilkan penyelesaian optimal.

Masih diperlukan suatu penanganan lebih lanjut untuk dapat mentukan apakah suatu penyelesaian sudah optimal. Langkah kedua diperlukan untuk menentukan apakah penyelesaian dasar yang dihasilkan dalam langkah satu sudah optimal. Langkah kedua terdiri atas dua metode, yaitu: Steppingstone, dan MODI (Modified-Distribution).

A. Metode Steppingstone

Untuk memberikan gambaran yang jelas tentang metode Steppingstone, pertama-tama akan kita selesaikan suatu persoalan transportasi yang sangat sederhana. Kemudian cara ini digunakan untuk menurunkan persoalan optimal dari suatu persoalan yang lebih kompleks. Tujuan dari penyelesaian persoalan sederhana berikut ini ialah untuk membiasakan para pembaca dengan istilah dan dasar pemikiran yang terkandung dalam metode Steppingstone.

Tabel 7.1

AWAL (ORIGIN)	TEMPAT TUJUAN (DESTINATION)		TOTAL
	D_1	D_2	
O_1	2 900 1	2 100 2 600	1000
O_2			600
TOTAL	900	700	

Mengikuti aturan NWC, diperoleh program awal sebagai tertera dalam tabel 7.1a. Program awal ini tidak merosot karena memiliki sel terisi sejumlah m + n-1 = 2 + 2 – 1 = 3. Program awal ini juga telah memenuhi semua persyaratan RIM.

1. Menentukan Opportunity Cost Dari Sel Kosong

Apakah program awal yang diperoleh seperti Tabel 7.1 sudah optimal? Untuk menjawab pertanyaan ini, harus dilakukan langkah ke dua, yaitu menentukan Opportunity Cost atau Biaya Kesempatan dari sel kosong.

Sebagai dimaklumi, model transportasi melibatkan pengambilan keputusan dengan kepastian maka disasdari bahwa suatu penyelesaian optimal tidak akan menimbulkan suatu biaya kesempatan yang positif.

Maka untuk menentukan apakah ada biaya kesempat6an yang bernilai positif dalam suatu prrogram, setiap sel kosong harus diselidiki (sel yang tidak ikut dalam jalur pengangkutan). Jika semua sel kosong telah memiliki opportunity cost yang tidak positif, maka program telah optimal.

Sebaliknya jika satu sel kosong saja memiliki "biaya kesempatan" yang positif maka program belum optimal hingga perlu diperbaiki. Marilah kita lakukan pengujian terhadap program yang diperoleh sebagai berikut.

Ambillah 1 unit dari O_2D_2: -1

Tabel 7.1a

Tambahkan 1 unit O_2D_1: + 1

Ambillah 1 unit dari O_1D_1: -1

Tambahkan 1 unit ke O_1D_2 : + 1

	D_1	D_2
O_1	$\boxed{2}$ -1 →	$\boxed{2}$ +1
O_2	$\boxed{1}$ +1	$\boxed{2}$ -1

Dalam program ini jelas bahwa sel O_2D_1, kosong, dan akan ditentukan apakah ada "ongkos kesempatan" berkaitan dengan sel ini. Ini dilakukan dengan memindahkan 1 unit barang ke sel O_2D_1, yang mengakibatkan penggeseran lainnya untuk memenuhi persyaratan "RIM", kemudian ditentukan biaya berkaitan dengan pemindahan ini.

Marilah digeser 1 unit dari sel O_2D_2 ke sel O_2D_1. Penggeseran ini mengakibatkan perubahan-perubahan untuk mempertahankan persyaratan "RIM". Perubahan-perubahan ini berkaitan dengan biaya berikut ini.

$$-2 + 1 - 2 + 2 = -1 \text{ dolar}$$

Kenyataan pemindahan 1 unit ke sel O_2D_1 menghasilkan perubahan ongkos -1 dolar, menunjukan opportunity cost karena tidak mengikut sertakan sel O_2D_1 di program pertama adalah +1 dolar per unit pengiriman. Sel kosong O_2D_1 harus diikut sertakan dalam program baru yang diperbaiki.

MEMPERBAIKI PROGRAM

Program Pertama Program Perbaikan

Dengan 1 permintaan

	D_1	D_2
O_1	$\boxed{2}$ 900 -	$\boxed{2}$ + 100
O_2	$\boxed{1}$ +	$\boxed{2}$ 600 -

	D_1	D_2
O_1	$\boxed{2}$ 899	$\boxed{2}$ 101
O_2	$\boxed{1}$ 1	$\boxed{2}$ 599

Menyadari opportunity cost sel O_2D_1 adalah positif maka program ini harus diperbaiki untuk memperoleh penyelesaian dasar baru yang memenuhi syarat. Ini dilakukan dengan merancang program perbaikan disusun sel O_2D_1 diikutsertakan dalam strategi pengangkutan. Marilah diadakan peningkatan dengan mengangkut 1 unit dari sel O_2D_2 ke sel O_2D_1.

Program yang telah diperbaiki terlihat pada tabel program perbaikan. Pergeseran 1 unit dari sel O_2D_2 ke sel O_2D_1 berarti bahwa tersisa 599 unit di sel O_2D_2 tetapi pergeseran apapun yang dilakukan tetap tidak boleh sel o_2D_2, tetapi pergeseran apapun yang dilakukan tetap tidak boleh melanggar persyaratan "RIM". Setelah pergeseran maka sel

O_2D_1terisi 1 unit dan sel O_2D_3 hanya berisi 599 unit. Untuk memenuhi persyaratan "RIM", maka dari sel O_1D_1 digeser 1 unit ke sel O_1D_2, sehingga dalam program perbaikan menunjukan sel $O_{1,}D_{1,}$ berisi 899 unit dan sel O_1D_2 berisi 101 unit.

Perubahan dalam program yang dipengaruhi oleh pergeseran 1 unit ke sel O_2D_1, menurunkan biaya pengangkutan sebanyak \$1. Selanjutnyam karena pergeseran 1 unit dari sel O_2D_2 ke sel O_2D_1 memberikan keuntungan \$1, kita harus menggeser sebanyak mungkin unit dari O_2D_2 ke sel O_2D_1.

Mengamati data yang ada, kita tidak dapat menggeser lebih dari 600 unit ke O_2D_1, tanpa melanggar persyaratan "RIM".

	D_1	D_2	TOTAL
O_1	2 899	2 899	1000
O_2	+ 899 1 -	2 + □	600
TOTAL	900	700	

Pergeseran 600 unit ke O_2D_1 menghasilkan tabel 7.1b, yang merupakan dasar yang lebih baik. Apakah program ini sudah optimal? Untuk diikutsertakan dalam program baru, setiap kali program harus diperbaiki.

Untuk memperoleh gambaran yang lebih jelas tentang metode "steppingstone" akan kita tunjukan penerapan pada persoalan yang lebih besar.

Langkah 1. Memperoleh solusi awal yang memenuhi syarat

Suatu solusi awal yang memenuhi syarat untuk persoalan transportasi dapat diperoleh dengan menggunakan aturan NWC, metode VAM atau metode inspeksi yang sederhana.

Akan ditampilkan kembali persoalan transportasi yang telah dikerjakan di modul 6, sehingga anda telah mengenai tabelnya yang diberikan berikut ketiga program awal yang diperoleh dengan metode VWC, metode VAM maupun metode inspeksi.

Digunakan persoalan yang memiliki data sebagai tertera pada tabel 6.2 dari modul 6. Di antara tiga program awal yang telah diperoleh dipilih program awal yang diperoleh dengan metode inspeksi.

Tabel 7.2

	DESTINATION (TEMPAT TUJUAN)					KAPASITAS
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	$\boxed{12}$ 10	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$ 15	$\boxed{5}$ 30 $\boxed{6}$	$\boxed{9}$	55
O_2	$\boxed{8}$ 30	$\boxed{1}$ 20	$\boxed{6}$ 25	$\boxed{7}$ $\boxed{9}$	$\boxed{7}$	45
O_3	$\boxed{1}$	$\boxed{12}$	$\boxed{4}$ $\boxed{6}$		$\boxed{7}$	30
O_4	$\boxed{10}$	$\boxed{15}$	10		$\boxed{1}$ 40	50
Deman	40	20	50	30	40	

Bermula dari tabel 7.2 ini hendak diperoleh penyelesaian optimal dengan menggunakan steppingstone. Jumlah sel terisi seharusnya ada m + n – 1 = 4 + 5 – 1 + 8. Memang ada sel isi, berarti solusi awal tersebut memenuhi persyaratan.

Langkah 2. Menentukan Opportunity Cost dari Sel-sel Kosong

Dalam metode Steppingstone sebuah loop tertutup dilengkapi dengan tanda + dan – harus ditentukan untuk setiap sel kosong sebelum opportunity cost bersangkutan dihitung. Program awal kita miliki 12 sel kosong, maka harus digambar 12 loop tertutup yang berbeda.

Opportunity cost berkaitan dengan setiap sel kosong dihitung, dan hasilnya tertera pada tabel 7.3. ternyata sel O_2D_1 merupakan satu-satunya sel kosong dengan opportunity cost positif. Maka sel O_2D_1 harus diikutsertakan dalam program perbaikan.

Langkah 3. Memperbaiki Suatu Program

Program awal belum optimal karena masih memiliki sel kosong O_2D_1 yang memiliki opportunity cost bernilai positif. Sekarang diperbaiki program dengan mengikutsertakan O_2D_1, dalam program baru. Tidak diperlukan adanya pemilihan karena sel O_2D_1, adalah satu-satunya sel dengan opportunity cost bernilai positif. Perbaikan program awal diarahkan oleh loop tertutup dari sel kosong. Karena 10 adalah bilangan terkecil dalam sel bertanda negatif dalam loop maka sebanyak 10 unit ditambahkan pada sel bertanda positif dan dikurangkan dari sel bertanda negatif.

Tabel 7.3

Perhitungan Opportunity Cost untuk Tabel 7.2

SEL KOSONG	LOOP TERTUTUP	PERUBAHAN ONGKOS	OPPORTU-NITY COST	TINDAKAN
O_1D_2	$+O_1D_2-O_1D_3+O_2D_3-O_2D_2$	+4-9+6-1=0	0	Tak berpengaruh
O_1D_3	$+O_1D_5-O_4D_5+O_4D_3-O_1D_3$	+9-1+6-9=+15	-5	Tak ikut dalam perbaikan
O_2D_1	$+O_2D_1-O_1D_1+O_1D_3-O_2D_3$	+8-12+9-6=-1	+1	Harus disertakan dlm perbaikan
O_2D_4	$+O_2D_4-O_1D_4+O_1D_3-O_2D_3$	+6-5+9-6=+4	-4	Tak ikut dalam perbaikan
O_2D_5	$+O_2D_5-O_2D_3+O_4D_3-O_4D_5$	+7-6+6-1=+6	-6	Tak ikut dalam perbaikan
O_3D_2	$+O_3D_2-O_3D_1+O_1D_1-O_1D_3+D_2-D_3O_2D_2$	+12-1+12-9+6-1=19	-19	Tak ikut dalam perbaikan
O_3D_3	$+O_3D_3-O_1D_3+O_1D_1-O_3D_1$	+4-9+12-1=+6	-6	Tak ikut dalam perbaikan
O_1D_4	$+O_3D_4-O_1D_4+O_1D_1-O_3D_1$	+7-5+12-1=+13	-13	Tak ikut dalam perbaikan
O_3D_5	$+O_3D_5-O_4D_3+O_4D_3+O_1D_3+O_1D_1-O_3D_1$	+7-1+6-9+12-1=+14	-14	Tak ikut dalam perbaikan
O_4D_1	$+O_4D_1-O_1D_1+O_1D_3-O_4D_3$	+10-12+9-6=+1	-1	Tak ikut dalam perbaikan
O_4D_1	$+O_4D_2-O_2D_2+O_2D_3-O_4D_3$	+15-1+6-6=+14	-14	Tak ikut dalam perbaikan
O_4D_4	$+O_4D_4-O_4D_3+O_1D_3-O_1D_4$	+9-6+9-5=+7	-7	Tak ikut dalam perbaikan

Tabel 7.4

Program Awal

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
O_1	$\boxed{12}$ 10 -	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$ + 15	$\boxed{5}$ 30	$\boxed{9}$
O_2	$\boxed{18}$ +	$\boxed{1}$ 20	$\boxed{6}$ 25 -	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$
O_3	$\boxed{1}$ 30	$\boxed{12}$	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{7}$
O_4	$\boxed{10}$	$\boxed{15}$	$\boxed{6}$ 10	$\boxed{9}$	$\boxed{1}$ 10

Program Perbaikan

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
O_1	$\boxed{12}$	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$ 25	$\boxed{5}$ 30	$\boxed{9}$
O_2	$\boxed{18}$ 10	$\boxed{1}$ 20	$\boxed{6}$ 15	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$
O_3	$\boxed{1}$ 30	$\boxed{12}$	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{7}$
O_4	$\boxed{10}$	$\boxed{15}$	$\boxed{6}$ 10	$\boxed{9}$	$\boxed{1}$ 10

Pertanyaan berikutnya: Apakah program perbaikan merupakan solusi optimal? Untuk menjawab pertanyaan ini kita harus mengulangi langkah 2, seperti dijelaskan sebelumnya. Jika langkah 2 menunjukan solusi yang belum optimal, harus diulangi langkah 3, yaitu memperbaiki program. Program diuji kembali dan seterusnya hingga akhirnya tercapai suatu solusi optimal.

c. Metode MODI

Modified distribution method, dikenal sebagai metode Modi, sangat mirip dengan metode " Steppingstone"kecuali MODI menyajikan cara yang lebih efesien untuk menghitung tanda peningkatan dari sel-sel yang kosong. Perbedaan utama antara dua metode ini menyangkut langkah dalam penyelesaian masalah, di mana diperlukan adanya suatu lintasan tertutup. Untuk menghitung penujuk peningkatan suatu solusi khusus maka dalam metode steppingstone perlu digambar suatu lintasan tertutup untuk setiap sel kosong. Ditentukan sel kosong dengan opportunity cost tertinggi, kemudian dipilih untuk diikutsrtakan dalam program perbaikan berikutnya.

Dalam metode MODI penunjuk peningkatan dapat dihitung tanpa menggambar lintasan tertutup. Dalam kenyataannya metode MODI memerlukan hanya satu lintasan tertutup. Lintasan ini digambar setelah sel kosong yang memiliki opportunity cost tertinggi positif ditemukan. Seperti dalam metode steppingstone, kegunaan lintasan ini ialah untuk menentukan jumlah unit maksimum yang dapat dipindahkan ke sel kosong dalam program perbaikan berikutnya. Maka, prosedur untuk menghitung opportunity cost dari sel kosong dalam MODI tidak tergantung pada lintasan loop tersebut.

Mekanisme dan kerangka pemikiran metode MODi akan digambarkan dengan penyelesaian persoalan transportasi yang sederhana sebagai berikut:

Tabel 7.6

	DESTINATION (TEMPAT TUJUAN)		KAPASITAS
	D_1	D_2	
O_1	2	2	1000
O_2	1	2	600
DEMAND (PERMINTAAN)	900	700	

Tabel 7.6a

	D_1	D_2
O_1	100 2	100 2
O_2	1	600 2

Melakukan langkah pertama menggunakan NWC diperoleh penyelesaian awal tertera pada tabel 7.6a. penggunaan steppingstone untuk menguji keoptimalan program awal sesuai tabel 7.6a menunjukan sel kosong O_2D_1 memiliki *opportunity cost* +1, sehingga program masih memerlukan perbaikan.

Metode lain untuk mencapai kesimpulan yang sama ialah melalui penentuan tentang apa yang disebut Implied cost dari sel kosong. Pengertian dari Imlied Cost akan dijelaskan dengan kaitannya dengan masalah kosong. Kita dapat menghitung perubahan harga karena pengangkutan 1 unit barang melalui sel kosong sebagai berikut.

$$O_1D_1 - O_1D_1 + O_1D_2 - O_2D_2 = O_2D_1 - 2 + 2 - 2 = O_2D_1 - 2$$

Berapa pun biaya pengangkutan per unit barang melalui sel kosong O_2D_1, adalah jelas bahwa pergeeran tersebut diinginkan hanya jika perubahan ongkos total (O_2D_1-2) adalah negatif. Nilai ini akan negatif. Nilai ini akan negatif selama biaya sebenarnya dari O_2D_1 kurang dari 2. Biaya limit atas yang telah dihitung dari sel O_2D_1 (dalam program ini) adalah 2, yang jika melebihi limit, maka keikutsertaan sel O_2D1 dalam program perbaikan tidak diinginkan. Dengan perkataan lain, jika biaya pengangkutan sebenarnya yang melalui O_2D_1 lebih besar dari \$2 per unit, pergeseran tersebut tidak diinginkan. Sebaliknya, jika biaya pengangkutan sebenarnya kurang dari \$2 per unit, pergeseran diinginkan dan sel O_2D_1 harus diikut sertakan dalam program berikutnya.

Implied Cost dari sel kosong O_2D_1 adalah \$2 per unit.

Seperti yang diketahui, negatif dari perubahan biaya total diakibatkan karena pergeseran I unit barang ke sel kosong memberikan opportunity cost berkaitan dengan sel kosong tersebut. Untuk sel O_2D_1

Opportunity cost = - (perubahan biaya total)

$$= -(O_2D_1 - 2) = 2 - o_2D_1$$

Dengan O_2D_1 adalah ongkos sebenarnya dari pengiriman per unit barang melalui sel O_2D_1. Tetapi, seperti baru saja dihitung, implied cost karena tidak menggunakan sel O_2D_1 adalah $2 per unit.

Opportunity cost = implied cost – ongkos sebenarnya

Subsitusi dari biaya pengiriman sebenarnya melalui sel O_2D_1, yaitu $1 dan *implied cost*yang telah dihitung dari sel O_2D_1 ke dalam pernyataan di atas menghasilkan 2 – 1 = + 1 dolar.

Nilai ini sama dengan opportunity cost dari sel O_2D_1 yang telah ditemukan dengan observasi langsung dari perubahan biaya yang disebabkan oleh pergeseran 1 unit barang ke dalam sel kosong O_2D_1. Kesamaan ini berlaku untuk setiap sel kosong, dan kita nyatakan kembali:

Opportunity cost = implied cost – ongkos sebenarnya

Pertanyaan berikutnya ialah: Dapatkah ditentukan implied cost dari sebuah sel kosong tanpa menggambarkan lintasan loop terlebih dahulu?

Jika seandainya ini mungkin, akan disusun kerangka utama dari etode MODI, karena kemungkinan dapat dikurangi ongkos sebenarnya dari implied cost sel kosong yang telah dihitung tanpa menggambar lintasan loop tersebut dahulu.

Marilah memperhatikan kembali program awal tabel 7.6 yang memenuhi syarat. Dalam program ini ada 3 tabrl sel terisi. Dalam istilah program linear, ini berarti variabel basis. Dapat diingat kembali dari metode simpleks bahwa opportunity cost dari variabel basis dalam program awal adalah nol.

Dengan demikian dapat ditunjukan bahwa dalam kasus masalah transportasi, opportunity dari setiap sel terisi (sel berisi variabel basis) adalah nol. Dengan perkataan lain, jika variabel basis tidak akan diubah maka pemasukan dan pemindahan 1 unit di sel terisi tidak akan mengakibatkan perubahan ongkos. Sekarang, tentukan sekumpulan bilangan baris (ditempatkan dibawah setiap kolom dari tabel) sedemikian rupa sehingga ongkos pengangkutan per unit dari setiap sel terisi sama dengan jumlah dari bilangan baris dan bilangan kolom,

Selanjutnya, karena jumlah bilangan baris dan bilangan kolom dari sebarang sel terisi sama dengan ongkos dari sel tersebut (suatu variabel basis) maka jumlah bilangan baris dan bilangan kolom dari setiap sel kosong memberikan impleks cost dari sel kosong tersebut. Maka implied cost sel kosong diberikan oleh

Implied cost = bilangan baris + bilangan kolom

$= u_1 + v_1$

Maka menentukan bilangan baris dan bilangan kolom secara lengkap, dapat dihitung implied cost untuk setiap sel kosong tanpa menggambar lintasan loop. Jelas, sekarang ditangulangi masalah penentuan bilangan baris dan bilangan kolom.

Untuk setiap sel terisi, harus dipilih u_1 (bilangan baris) dan v_j (bilangan kolom) sehingga c_{ij} (biaya pengangkutan sebenarnya per unit di sel terisi) sama dengan jumlah dari u_1 dan v_j. Misalkan untuk sel terisi yang terletak di baris 1 maka $c_{ij} = u_i + v_j$ dan $c_{12} = u_1 + v_2$ dan seterusnya.

Proses ini harus dilakukan untuk setiap sel terisi. Tetapi perlu disadari bahwa walaupun solusi dasar yang memenuhi syarat dalam suatu model transportasi terdiri atas m + n – 1 variabel dengan perkataan lain terdapat m + n – 1 sel terisi, harus ditentukan m + n nilai untuk memperoleh sekumpulan baris dan kolom, harus dipilih satu bilangan sebarang yang mewakili suatu baris atau suatu kolom.

Sekali sebuah bilangan baris atau kolom telah dipilih secara sebarang, bilangan baris dan bilangan kolom lainnya dapat ditentukan oleh hubungan $c_{ij} = u_i + v_j$.

Hubungan ini harus berlaku untuk semua sel isi. Karena sebarang bilangan dapat dipilih untuk mewakili salah satu dari u_1 atau v_j, kita akan mengikuti secara praktis dengan memisalkan $u_i = 0$. Prosedur langsung diterapkan pada tabel 7.6a dan diperoleh tabel 7.6a sebagai berikut.

Tabel 7.6b

ORIGIN	DESTINATION		BILANGAN BARIS
	D_1	D_2	
O_1	900 $\boxed{2}$	100 $\boxed{2}$	0
O_2	$\boxed{1}$	600 $\boxed{2}$	0
BILANGAN KOLOM	2	2	

$C_{11} = u_1 + v_1$

$2 = 0 + v_1 \longrightarrow v_1 = 2$

$C_{12} = u_1 + v_2$

$2 = 0 + v_2 \longrightarrow v_2 = 2$

$C_{22} = u_2 + v_2$

$2 = u_2 + 2 \longrightarrow u_2 = 0$

Sekarang akan dihitung opportunity cost dari sel kosong O_2D_1.

Opportunity cost = implied cost – ongkos sebenarnya

$= (u_1 + v_j) - c_{ij}$

Untuk sel O_2D_1 berlaku

Opportunity cost $= (u_2 + v_1) – c_{21}$

$= (o_2 + 2) – 1 = + 1$ dolar

Program ini belum optimal karena sel kosong O_2D_1 masih memiliki opportunity cost yang bernilai positif.

Proses yang telah dilakukan akan dirangkum untuk dapat memberikan gambaran yang lebih jelas tentang apa yang telah dikerjakan.

Tabel 7.7

Implied cost	Ongkos sebenarnya	Tindakan
Ui + Vj	> Cij	Program yang lebih baik dapat disusun dengan mengikutsertakan sel ini
Ui + Vj	= Cij	Tak berpengaruh
Ui + Vj	<Cij	Sel ini jangan diikutsertakan dalam program

Jika implied cost $(u_i + v_j)$ dari suatu sel kosong lebih besar dari ongkos sebenarnya (c_{ij}) maka sel kosong ini dapat dibuat sertakan dalam perbaikkan program berikutnya. Jika implied cost $(u_i + v_j)$ dari suatu sel kosong kurang dari ongkos sebenarnya (c_{ij}) maka sel kosong ini jangan diikuti sertakan.

Jika $(u_i + v_j) = c_{ij}$ maka sel kosong ini tidak berpengaruh terhadap perbaikan program.

Singkatnya, untuk menilai dan meningkatkan program dengan tujuan ialah meminimumkan fungsi objektif maka aturan yang tertera pada tabel 7.7 berlaku.

Untuk suatu persoalan transportasi dengan tujuan memaksimumkan fungsi objektif,tanda dari pertidaksamaan pada tabel 7.7 harus dibalik

Langkah terakhir dalam metode MODI persis sama seperti langkah berkaitan dalam metode steppingstone. Setelah mengenali sel kosong yang memiliki opportunity cost terbesar positif, sel kosong ini harus diikut srtakan dalam program perbaikan dan sebuah lintasan tertutup harus digambar untuk sel ini.

Penyelesaian yang baru dan memenuhi syarat diturunkan dari program awal dengan menggeser unit barang sebanyak mungkin ke dalam sel kosong tanpa melanggar persyaratan RIM.

Program awal program perbaikan

	D_1	D_2
O_1	2 900	2 + 100
O_2	1 +	2 - 600

	D_1	D_2
O_1	2 300	2 700
O_2	1 600	2

Untuk menemukan apakah program perbaikan ini sudah optimal harus ditentukann opportunity cost sel kosong O_2D_2.

Tabel 7.8

ORIGIN	DESTINATION		BILANGAN BARIS
	D_1	D_2	
O_1	300 | 2	700 | 2	0
O_2	600 | 1	2	-1
BILANGAN KOLOM	2	2	

$$C_{11} = u_1 + v_1 = 0 + v_1 \longrightarrow 2 = v_1$$

$$C_{12} = u_1 + v_2 = 0 + v_2 \longrightarrow 2 = v_2$$

$$C_{21} = u_2 + v_2 = u_2 + 2$$

$$1 = u_2 + 2 \longrightarrow u_2 = -1$$

Perhitungan opportunity cost untuk sel kosong O_2D_2 dilakukan sebagai berikut.

Implied cost = $u_2 + v_2 = -1 + 2 = 1$

Ongkos sebenarnya = $c_{22} = + 2$

Opportunity cost dari sel kosong O_2D_2

= implied cost – actual cost

= + 1 – 2 = -1

Karena satu-satunya sel kosongdalam program memiliki opportunity cost – 1 maka program sudah optimal. Untuk jelasnya metode MODI akan diterapkan pada persoalan yang sudah dikenal dalam kegiatan belajar 1, yaitu tertera di tabel 7.2.

Tabel 7.2

Awal Origin	DESTINATION (TEMPAT TUJUAN)					Total
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	12 10	4	9 15	5 30	9	55
O_2	8	1 20	6 25	6	7	45
O_3	1 30	12	4	7	7	30
O_4	10	15	6 10	9	1 40	30
Total	40	20	50	30	40	

Apa yang tertera pada tabel 7.2 merupakan program awal yang diperoleh pada langkah pertama dengan menggunakan metode inspeksi.

Langkah 2

Menetukan opportunity cost dari sel kosong untuk mengkaji keoptimalan program awal tersebut di atas. Digunakan MODI dalam langkah 2 ini.

$C_{11} = 12 = u_1 + v_1 = 0 + v_1 \longrightarrow v_1 = 12$ dengan $u_1 = 0$

$C_{13} = 9 = u_1 + v_3 = 0 + v_3 \longrightarrow v_3 = 9$

$C_{14} = 5\ u_1 + v_4 = 0 + v_4 \longrightarrow v_4 = 5$

$C_{23} = 6\ u_2 + v_3 = u_2 + 9 \longrightarrow u_2 = -3$

$C_{31} = 1 = u_3 + v_1 = u_3 + 12 \longrightarrow u_3 = -1$

$C_{22} = 1 = u_2 + v_2 = -3 + v_2 \longrightarrow v_2 = 4$

$C_{43} = 6 = u_4 + v_3 = u_4 + 9 \longrightarrow u_4 = -3$

$C_{45} = 1 = u_4 + v_5 = -3 + v_5 \longrightarrow v_5 = 4$

Dengan perhitungan bilangan baris dan bilangan kolom ini dapat disusun tabel 7.9 yang diperlukan oleh metode MODI untuk menghitung opportunity cost dari setiap sel kosong.

Tabel 7.9

	DESTINATION					Bilangin Baris
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	12 10	4 4	9 15	5 30	9 4	0 1
O_2	8 9	1 20	6 25	6 2	7 1	-3
O_3	1 30	12 -7	4 -2	7 -6	7 -7	-11
O_4	10 9	15 1	6 10	9 2	1 40	-3
Bilangan Kolom	12	4	9	5	4	

Bilangan tanpa lingkaran dalam suatu sel kosong menunjukan implied cost dari sel kosong tersebut. Seperti diketahui maka

Opportunity cost = implied cost – actual cost

Perhitungan opportunity cost untuk tiap-tiap sel kosong hanya sel kosong O_2D_1 yang memiliki opportunity cost bernilai positif, yaitu 9 – 8 = + 1. Maka program ini belum optimal dan perlu perbaikan dengan mengikut sertakan sel kosong O_2D_1.

Langkah 3. Perbaikan Program

Lintasan loop untuk sel kosong O_2D_1 digambar dan program diperbaiki. Loop tersebut menghubungkan sel-sel $O_2D_1 \rightarrow O_1D_1 \rightarrow O_1D_3 \rightarrow O_2O_3$ dan banyaknya barang yang digeser dan mulai sel O_2D_1 adalah 10 unit. Perbaikan program menghasilkan tabel 7.10.

7.10.

	DESTINATION					Bilangin Baris
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	$\boxed{12}$ 11	$\boxed{4}$ 4	$\boxed{9}$ 25	$\boxed{5}$ 30	$\boxed{9}$ 4	1 0
O_2	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{1}$ 20	$\boxed{6}$ 25	$\boxed{6}$ 2	$\boxed{7}$ 1	-3
O_3	$\boxed{1}$ 30	$\boxed{12}$ -6	$\boxed{4}$ -1	$\boxed{7}$ -5	$\boxed{7}$ -6	-10
O_4	$\boxed{10}$ 8	$\boxed{15}$ 1	$\boxed{6}$ 10	$\boxed{9}$ 2	$\boxed{1}$ 40	-3
Bilangan Kolom	11	4	9	5	4	

Selanjutnya harus ditentukan bilangan baris dan bilangan kolomnya:

Selanjutnya harus ditentukan bilangan baris dan bilangan kolomnya:

$U_1 = 0, c_{13} = u_1 + v_3 \longrightarrow 9 = 0 = v_3 \longrightarrow v_3 = 9$

$C_{14} = u^1 + v_4 \longrightarrow 5 = 0 + v_4 \longrightarrow v_4 = 5$

$C_{23} = u_2 + v_3 = u_2 + 9 \longrightarrow 6 = u_2 + 9 \longrightarrow u_2 = -3$

$C_{21} = u_2 + v_2 = u_2 - 3 \longrightarrow 8 = -3 + v_1 \longrightarrow v_1 = 11$

$C_{22} = u_2 + v_2 = u_2 - 3 \longrightarrow 1 = -3 + v_2 \longrightarrow v_2 = 4$

$C_{31} = u_3 + v_1 = u_3 + 11 \longrightarrow 1 = u_3 + 11 \longrightarrow u_3 = -10$

$C_{43} = u_4 + v_3 = u_4 + 9 \quad 6 = u_4 + 9 \longrightarrow u_4 = -3$

$C_{45} = u_4 + v_5 = -3 + v_5 \longrightarrow 1 = -3 + v_5 \longrightarrow v_5 = 4$

Mengurangi bilangan tanpa lingkaran dalam sel kosong dengan ongkos sebenarnya, menunjukan bahwa tidak ada satu sel kosong pun yang memiliki opportunity cost positif. Maka solusi yang tertera di tabel 7.10 adalah optimal dengan biaya.

25(9) + 30(5) + 10(8) + 20(1) + 15(6) + 30(1) + 10(6) + 40(1) = \$ 695

Ringkasan Prosedur MODI Kasus Minimum

Mengurangi bilangan tanpa lingkaran dalam sel kosong dengan ongkos sebenarnya, menunjukan bahwa tidak ada satu sel kosong pun yang memiliki opportunity cost positif. Maka solusi yang tertera di tabel 7.10 adalah optimal dengan biaya.

25(9) + 30(5) + 10(8) + 20(1) + 15(6) + 30(1) + 10(6) + 40(1) = \$ 695

Ringkasan Prosedur MODI Kasus Minimum

Langkah 1. Memperoleh solusi dasar yang memenuhi syarat .metode yang digunakan NWC, VAM atau INSPEKSI. Harus diperoleh m + n – 1 sel terisi.

Jika jumlah sel terisi melebihi m + n -1 maka ada salah hitung.

Jika jumlah sel terisi kurang dari m + n – 1 maka solusi ini mengalami "kemerosotan".

Langkah 2. Menentukan opponunity cost dari setiap sel kosong

a. Tentukan bilangan baris dan bilangan kolom secara lengkap

b. Untuk setiap sel terisi berlaku c_{ij} = ui + v_j ambillah $u_1 = 0$

c. Hitunglah implied cost dari setiap sel kosong

   Implied cos = bilangan baris + bilangan kolom

d. Tentukan opportunity cost dari setiap sel kosong opportunity cost = $u_1 + v_j - c_{ij}$

   Jika semua sel kosong memiliki opportunity cost tidak positif maka penyelesaian sudah optimal. Jika masih ada sel kosong yang memiliki opportunity cost positif, program masih dapat diperbaiki

Langkah 3. Merancang peningkatan program sel kosong yang memiliki opportunity cost positif terbesar diikutsertakan dalam program perbaikan.

a. Gambarlah suatu loop melalui sel kosong tersebut menuju sel-sel terisi kemudian kembali lagi ke sel kosongnya.

b. Beri tanda (+) padas el kosong yang akan diisi, kemudian berganti-ganti letakkan tanda (+) dan (-) pada sel-sel terisi yang dilalui loop.

c. Banyaknya barang yang harus digeser ditemukan oleh alokasi terendah dari sel yang bertanda (-).

Langkah 4 ulangi langkah 2 dan 3 sampai diperoleh program yang optimal.

LATIHAN

1) apa yang dikerjakan di langkah dua, dalam suatu metode transportasi apa tujuan langkah ini?
2) Metode apa yang digunakan dalam langkah dua?
3) Bagaimana anda menyelidiki apakah sebuah program transportasi sudah optimal?
4) Bagaimana anda memperbaiki program yang belum optimal?
5) Bagaimana anda menentukan jumlah barang yang harus digeser jika suatu program yang belum optimal harus diperbaiki?
6) Hubungan apakah antara bilangan baris dan bilangan kolom yang terdapat dalam setiap sel terisi?
7) Bagaimana anda mentukan banyaknya barang yang harus digeser ke sel kosong yang meiliki opportunity cost positif terbesar?
8) Jika dalam sel kosong berlaku $u_i + v_j \leq c_{ij}$ langkah apa yang anda lakukan terhadap sel ini?
9) Apakah untuk sel terisi selalu berlaku $u_i + v_j = c_{ij}$?

RANGKUMAN

1. memahami apa arti dan kegunaan langkah 2 dalam metode transportasi
2. menentukan *opportunity cost* dari setiap sel kosong
3. memahami suatu program model transportasi belum optimal jika masih ada sel kosong yang memiliki *opportunity cost* yang positif.
4. memperbaiki program yang belum optimal dengan mengikut sertakan sel kosong yang memiliki *opportunity cost* positif terbesar.
5. mampu menentukan jumlah barang yang harus digeser sehingga mengisi sel kosong yang memiliki *opportunity cost* terbesar positif.
6. Secara keseluruhan anda telah mampu menerapkan metode *steppingstone* untuk menyelidiki keoptimalan suatu program.

7. memahami arti dan kegunaan algoritma MODI.
8. mampu menentukan bilangan baris dan bilangan kolom secara lengkap
9. menentukan opportunity cost dari setiap sel kosong tanpa menggambar lintasan loop untuk setiap sel kosong
10. memahami bahwa untuk setiap sel terisi berlaku

$$C_{ij} = u_j + v_j$$

11. memahami bahwa jika untuk sebuah sel kosong $u_i + v_j > c_{ij}$ maka sel kosong ini perlu diikutsrtakan dalam perbaikan program.

UJI KOMPETENSI

Diberikan suatu masalah transportasi dengan data sebagai berikut:

Dari \ Ke	Proyek D_1	Proyek D_2	Proyek D_3	Kapasitas
Pabrik O_1	4	8	8	56
Pabrik O_2	16	24	16	82
Pabrik O_3	8	16	24	77
Deman/ Permintaan	72	102	41	215 215

Dari \ Ke	Proyek D_1	Proyek D_2	Proyek D_3	Kapasitas
Pabrik O_1	4 56 16	8 66	8	56
Pabrik O_2	16	24 36	16	82
Pabrik O_3	8	16	24 41	77

Deman/ Permintaan	72	102	41	

Program awal (1)

1) Program awal ini harus diselidiki apakah suatu optimal. Penyelidikan dilakukan dengan ….
   A. Metode VAM
   B. Aturan NWC
   C. Metode *steppingstone*
   D. Metode inspeksi

2) Penyelidikan sesuai dengan langkah dua menunjukkan bahwa sel-sel kosong yang masih memiliki opportunity cost bernilai positif adalah sel-sel ….
   A. O_3D_1
   B. O_1D_3, O_3D_1
   C. O_3D_1, O_1D_3, O_2D_3
   D. O_1D_2, O_1D_3, O_2D_3

3) Perbaikan program harus mengikutsertakan sel kosong yang memiliki opportunity cost tertinggi. Sel yang harus diikut sertakan adalah ….
   A. O_1D_2
   B. O_2D_3
   C. O_3D_1
   D. O_1D_3

4) Program II yang telah diperbaiki ternyata masih memiliki sel kosong dengan opportunity cost bernilai cost bernilai positif. Sel kosong tersebut ialah ….
   A. O_1,D_2 dengan *opportunity cost* + 3
   B. O_3,D_3 dengan *opportunity cost* + 16
   C. O_1,D_3 dengan *opportunity cost* + 4
   D. O_3,D_1 dengan *opportunity cost* + 8

5) Program II harus diperbaiki dengan mengikutsertakan sel kosong ….
   A. O_3D_1
   B. O_1D_2
   C. O_1D_3
   D. O_3D_3

6) Program II memiliki alokasi ….
   A. $O_1D_1 = 56$, $O_2D_1 = 16$, $O_2D_2 = 20$, $O_2D_3 = 41$, $O_3D_2 = 70$
   B. $O_1D_2 = 56$, $O_2D_1 = 16$, $O_2D_2 = 25$, $O_2D_3 = 45$, $O_3D_2 = 77$
   C. $O_1D_1 = 56$, $O_2D_1 = 16$, $O_2D_2 = 25$, $O_2D_3 = 41$, $O_3D_2 = 77$
   D. $O_2D_1 = 56$, $O_1D_1 = 16$, $O_2D_2 = 25$, $O_2D_3 = 41$, $O_3D_2 = 77$

7) Program yang memerlukan hasil perbaikan program II memiliki alokasi ….

A. $O_1D_1 = 31$, $O_1D_3 = 25$, $O_2D_1 = 41$, $O_2D_3 = 41$, $O_3D_2 = 77$

B. $O_1D_1 = 31$, $O_1D_2 = 25$, $O_2D_1 = 41$, $O_2D_3 = 41$, $O_3D_2 = 77$

C. $O_1D_1 = 41$, $O_1D_2 = 25$, $O_2D_1 = 31$, $O_2D_3 = 41$, $O_3D_2 = 77$

D. $O_1D_1 = 41$, $O_1D_2 = 16$, $O_2D_1 = 41$, $O_2D_3 = 36$, $O_3D_2 = 70$

8) Program III ternyata belum optimal karena masih memiliki sel kosong dengan *oppurtunity cost* bernilai positif. Sel kosong tersebut ialah ….

A. O_1D_3

B. O_2D_2

C. O_3D_3

D. O_3D_1

9) Pogram III diperbaiki dan menghasilkan program IV dengan alokasi ….

A. $O_1D_2 = 56$, $O_2D_1 = 41$, $O_2D_3 = 41$, $O_3D_1 = 31$, $O_3D_2 = 46$

B. $O_1D_3 = 56$, $O_2D_1 = 41$, $O_2D_2 = 41$, $O_3D_1 = 31$, $O_3D_2 = 46$

C. $O_1D_3 = 41$, $O_2D_1= 56$, $O_2D_3 = 341$, $O_3D_1 = 31$, $O_3D_2 = 46$

D. $O_1D_2 = 56$, $O_2D_1 = 41$, $O_2D_3 = 41$, $O_3D_2 = 30$, $O_3D_2 = 46$

10) Program IV ternyata sudah optimal dengan biaya total angkutan sebesar ….
   A. $ 2726
   B. $ 2735
   C. $ 2744
   D. $ 27$6

Diberikan suatu persoalan transportasi dengan data sebagai berikut.

	D_1	D_2	D_3	Kapasitas
O_1	4 16	8 24	8 16	56
O_2	8	16	24	82
O_3				77
Demand (Permintaan)	72	102	41	

Melakukan langkah I menggunakan aturan NWC deperoleh solusi dasar sebagai berikut

Program I

	D_1	D_2	D_3	Bilangan baris
O_1	4 56	8	8	
O_2	16 16	24 66 36	16 41	
O_3	8	16	24	
Bilangan kolom				

11) Perhitungan bilangan baris menghasilkan ….

A. $U_1 = 0, u_2 = 4, u_3 = 20$

B. $U_1 = 0, u_2 = 12, u_3 = 4$

C. $U_1 = 4, u_2 = 0, u_3 = 12$

D. $U_1 = 0, u_2 = -12, u_3 = 24$

12) Perhitungan bilangan kolom menghasilkan

A. $V_1 = 4, v_2 = 20, v_3 = 12$

B. $V_1 = 12, v_2 = 4, v_3 = 20$

C. $V_1 = 4, v_2 = 12, v_3 = 24$

D. $V_1 = 4, v_2 = 12, v_3 = 20$

E.

13) Implied cost positif terbesar dimiliki oleh sel kosong ….

A. c_{ij}

B. $m + n – 1$

C. $u_1 + v_j$

D. $u_i + v_j - c_{ij}$

14) opportunity cost positif terbesar dimiliki oleh sel kosong ….
  A. O_1D_3
  B. O_2D_3
  C. O_3D_1
  D. O_3D_3

15) Program II masih memiliki sel kosong dengan opportunity cost bernilai positif. Sel-sel itu adalah ….
  A. O_1D_3 dan O_3D_3
  B. O_1D_2 dan O_3D_3
  C. O_1D_2 dan O_1D_3
  D. O_1D_2 saja

16) Perbaikan program II menghasilkan program dengan alokasi sebagai berikut ….
  A. $O_1D_1 = 31$, $O_1D_2 = 25$, $O_2D_1 = 41$, $O_2D_3 = 41$, $O_3D_2 = 77$
  B. $O_1D_1 = 31$, $O_1D_3 = 25$, $O_2D_1 = 41$, $O_2D_3 = 41$, $O_3D_3 = 77$
  C. $O_1D_1 = 31$, $O_1D_2 = 25$, $O_2D_1 = 41$, $O_2D_2 = 41$, $O_3D_2 = 77$
  D. $O_1D_1 = 25$, $O_1D_2 = 31$, $O_2D_1 = 41$, $O_2D_3 = 41$, $O_3D_2 = 77$

17) Program belum optimal karena masih memiliki sel kosong dengan opportunity cost yang positif. Sel tersebut adalah ….

A. O_3D_1 saja
B. O_3D_3 saja
C. O_1D_3 dan O_3D_1
D. O_2D_2 dan O_3D_3

18) Program m setelah diperbaiki menghasilkan program IV dengan alokasi sebagai berikut ….
    A. $O_1D_2 = 56$, $O_1D_3 = 41$, $O_2D_1 = 41$, $O_3D_1 = 31$, $O_3D_2 = 46$
    B. $O_1D_2 = 36$, $O_1D_3 = 20$, $O_2D_1 = 41$, $O_2D_3 = 41$, $O_3D_3 = 46$
    C. $O_1D_2 = 56$, $O_2D_1 = 41$, $O_2D_3 = 41$, $O_3D_2 = 31$, $O_3D_2 = 46$
    D. $O_1D_2 = 56$, $O_2D_1 =41$, $O_2D_3 = 41$, $O_3D_1 = 31$, $O_3D_3 = 46$
19) Penyelesaian terhadap program IV menghasilkan bahwa ….
    A. Program belum optimal
    B. Program sudah optimal
    C. Program mengalami kemerosotan
    D. Sel O_3D_3 memiliki opportunity cost 16

20) Akhirnya program optimal tercapai dengan biaya pengangkutan terendah ….
    A. $ 2715
    B. $ 2718
    C. $ 2735
    D. $ 2744

BAB VIII
TRANSPORTASI (BAGIAN III)

A. PENDAHULUAN

Penyelesaian masalah transportasi telah dibahas dalam modul 6 dan modul 7. Dalam kedua modul tersebut, masalah transportasi yang dihadapi selalu memenuhi persyratan "RIM' untuk baris maupun kolom sehingga:

$$\sum b_i = \sum d_j$$

Persyaratan ini mustahil selalu dapat dipenuhi, karena masalah yang timbul dalam keadaan sehari-hari adalah jauh dari bentuk

$$\sum b_i \,, \neq \sum d_j$$

Kita perlu menentukan beberapa langkah penyelesaian jika ternyata permintaan dan persediaan tidak seimbang.

Lebih dari itu, mungkin yang dihadapi persoalan transportasi mengalami "kemerosotan". Untuk mampu menangani masalah transportasi dengan "kemerosotan" perlu ditentukan beberapa langkah tertentu.

B. PERMINTAAN DAN PERSEDIAAN TIDAK SEIMBANG

Untuk menyelesaikan persoalan transportasi dengan menggunakan beberapa langkah yang telah dibahas dalam modul 6 dan 7, harus kita usahakan agar jumlah persediaan sama dengan jumlah permintaan.

Ada kemungkinan akan timbulnya 3 kasus:

Kasus I:

$$\sum b_i = \sum d_j$$

Dalam kasus ini banyak persediaan sama dengan banyak permintaan. Persoalan ini dapat disusun dalam b

Entuk matriks, serta data ongkos yang relevan, dan algoritma transportasi dapat diterapkan secara langsung untuk memperoleh penyelesaian.

Kasus 2: $\sum b_i < \sum d_j$

Dalam kasus ini kapasitas tempat asal melebihi permintaan tempat tujuan.

Tujuan yang dummy (bohongan) dapat ditambahkan kepada matriks untuk menyerap kelebihan kapasitas dan banyak permintaan. Setelah persyaratan "RIM" dipenuhi maka masalah ini dapat diselesaikan dengan metode transportasi yang diberikan.

Contoh ilustratif

Table 8.1

	D_1	D_2	D_3	Kapasitas 0
O_1	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	200
O_2	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	400
Permintaan	300	200	150	

Table 8.1 menunjukan suatu masalah transportasi yang tidak seimbang,

karena

$$\sum b_i = 200 + 400 = 600$$

Dan

$$\sum d_j = 200 + 200 + 100$$
$$= 500$$

Jelas $\sum b_i > \sum d_i$

Agar dapat memenuhi persyaratan "RIM" maka diciptakan "DUMMY" tujuan dengan ongkos pengangkutan nol

Table 8.1a

	D_1	D_2	D_3	Dummy	Kapasitas 0
O_1		5	3	2 0	200
O_2		6	4	1 0	400
Permintaan	300	200	150	100	

Barang sebanyak 100 unit kelebihan dikirim ke tujuan "DUMMY" yang dalam penerapan dapat dianggap sebagai gudang penyimpanan atau diberikan sebagai hadiah ke suatu instansi. Dengan penambahan tujuan summy maka dipenuhi persyaratan "RIM", $\sum b_i = \sum d_j$ sehingga penyelesaian selanjutnya dapat menggunakan beberapa langkah yang telah ditentukan dalam penanganan "model transportasi".

Kasus 3:

$\sum b_i < \sum d_i$

Dalam kasus ini kapasitas total tempat awal luring dari banyak permintaan. Diperlukan "DUMMY" tempat asal yang dapat ditambahkan pada matriks transportasi untuk mengimbangkan kelebihan permintaan. Biaya pengangkutan dari tempat pengiriman "DUMMY" kesetiap tempat tujuan dimisalkan nol. Pembuatan tempat asal dummy dalam ini mengakibatkan kesamaan antara kapasitas total tempat asal dan permintaan total tempat tujuan.

Table 8.2

	D_1	D_2	D_3	Kapasitas 0
O_1	5	3	2	200
O_2	6	4	1	400
Permintaan	300	200	150	600 / 650

Table 8.2a

	D_1	D_2	D_3	Kapasitas 0
O_1	5	3	2	200

O_2	6 0	4 0	1 0	400
Dummy				50
Permintaan	300	200	150	600 / 650

Sehingga persyaratan "RIM" dengan sendirinys dipenuhi. Table 8.2 dan table 8.2a memberikan ilustrasi yang jelas tentang apa yang telah kita hadapi. Dalam penerapan 'dummy" tempat asal dapat diartikan meminjam dari took sebelah untuk memenuhi permintaan.

Contoh:

Diberikan contoh masalah berikut untuk memperoleh gambaran yang lebih jelas tentang penyelesaian masalah transportasi yang tidak seimbang ($\sum b_i > \sum d$)

Table 8.3

	Proyek A	Proyek B	Proyek C	Kapasitas 0
Pabrik w	4	8	8	76

Pabrik X	16	24	16	82
Pabrik Y	8	16	24	77
Permintaan	72	102	41	235 / 215

Sebelum diterapkan langkah pertama dan langkah penyelesaian ini, perlu diusahakan dipenuhi dahulu persyratan "RIM", yaitu ditentukan tujuan "DUMMY". Langkah pertama dilakukan dengan aturan NWC, diperoleh program I dengan biaya pengangkutan sebesar

72 ($4) + 4 ($8) + 82 ($24) + 16 ($16) + 41 ($24) + 20 ($0) = $3528

Program I

	A	B	C	Dummy	Kapasitas
W	72	8 4	8	0	76
X	16	24 82	16 +16	0	82
Y	8	16 16	24 41	0 20	77
Permintaan	72	102	41	20	235 215

Masih perlu diselidiki lebih lanjut apakah program I ini telah optimal. Dengan aturan MODI opportunity cost setiap sel kosong, dihasilkan sel XC dengan opportunity cost tertinggi yaitu + 16. Langkah berikutnya ialah membuat lintasan loop melalui sel-sel + XC – YC + YB = XB. Banyak barang yang harus digeser adalah 41. Perbaikan program menghasilkan program II yang masih harus diselidiki lebih lanjut.

Program II

	A	B	C	Dummy	Kapasitas
W	4 72	8 4	8	0	76
X	16	24 41	16 41	0 +8	82
Y	8	16 57	24	0 20	77
Permintaan	72	102	41	20	235 215

Penyelidikan sel kosong menggunakan aturan MODI menunjukan sel XD memiliki oportunity cost terbesar, yaitu +8, maka program harus diperbaiki dengan mengikutsertakan sel XD. Dirancang lintasan loop tertutup melalui sel +XD – YD + YB – XB, dan barang yang harus digeser sejumlah 20 unit.

Perbaikan Program II menghasilkan program III sebagai berikut.

Program III

	A	B	C	Dummy	Kapasitas
W	4 72	8 4	8	0	76
X	16 +4	24 41	16 41	0 20	82
Y	8 +4	16 77	24	0 20	77
Permintaan	72	102	41	20	

Dengan aturan MODI sekali lagi program III diselidiki, apakah telah optimal. Perhitungan opportunity cost untuk setiap sel kosong menghasilkan sel XA memiliki opportunity cost +4 dan sel YA juga memiliki opportunity cos +4. Salah satu sel ini diikutsertakan dalam perbaikan program, marilah ditentukan bahwa sel YA akan ikut dalam perbaikan program. Selanjutnya perlu digambarkan lintasan loop tertutup melalui sel-sel +YA – WA + WB – YB dengan menggeser 72 unit batang. Perbaikan program III menghasilkan Program IV

Program IV

	A	B	C	Dummy	Kapasitas
W	4	8 76	8	0	76
X	16	24 21	16 41	0 20	82
Y	8 72	16 5	24	0	77
Permintaan	72	102	41	20	

Digunakan metode MODI, diselidiki lagi opportunity cost dari setiap sel kosong. Ternyata tidak ada sel kosong yang memiliki opprtunity cost positif maka program IV adalah optimal dengan biaya pengangkutan sebanyak :

76(\$8)+21(\$24)+41(\$16)+20(\$0)+72(\$8)+5(\$16) = \$2424

C. MASALAH TRANSPORTASI

Telah dijelaskan penyelesaian dasar yang memenuhi syarat untuk suatu masalah transportasi terdiri atas m + n -1 kurang dari banyak baris dan kolom variabel basis. Ini berarti banyak sel terisi dalam suatu program transportasi satu dalam matriks transportasi.

Jika banyak sel terisi kurang dari m + n – 1 maka persoalan transportasi disebut *merosot*. Kemerosotan dalam masalah transportasi dapat dikembangkan dengan dua cara.

Pertama, persoalan mengalami kemerosotan pada waktu program awal disusun melelui salah satu metode langkah pertama. Untuk menangani kemerosotan alokasi semacam ini, dapat diberi alokasi banyak barang yang kecil sekali (mendekati

0) terhadap salah satu atau lebih dari sel kosong, sehingga banyak sel ini menjadi m + n – 1.

Banyak barang yang kecil ini disebut ε (*epsilon*), dan sel yang diberi alokasi ε menjadi sel terisi. Banyak barang sebanyak ε demikian kecil, sehingga pengurangan atau penembahan terhadap banyak barang tidak mengubah bilangannya. Misalkan 50 + ε = 50 dan 200 - ε = 200, dan ε - ε = 0. Kemerosotan yang timbul selama program awal akan dijelaskan dengan masalah transportasi berikut ini.

Table 8.5

Data Masalah TRansportasi

Awal	D_1	D_2	D_3	Kapasitas Awal
	2	1	2	
O_1				20
O_2	3	4	1	40
Permintaan	20	15	25	

Kedua, persoalan transportasi dapat merosot selama tahap penyelesaian. Hal ini terjadi jika keikutsertaan sel kosong yang memiliki *opportunity cost* tertinggi mengakibatkan kekosongan dua sel atau lebih di antara sel-sel yang ikut dalam program. Untuk menangani kasus kemerosotan semacam ini harus ditempatkan ε pada satu atau lebih sel kosong.

Kasus 1: Kemerosotan pada Penempatan Awal

Mengikuti aturan NWC, diperoleh penempatan awal sesuai Tabel 8.5a

Table 8.5a

Awal	D_1	D_2	D_3	Kapasitas Awal
O_1	2 20	1	2	20
O_2	3	4 15	1 25	40
Permintaan	20	15	25	

Program awal ini memiliki sel terisi terbanyak 3 sel, sedangkan $m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$. Maka program awal ini mengalami kemerosotan. Kita dapat memecahkan persoalan ini dengan menempatkan ε di sel kosong sebarang. Kalau persoalan ini menentukan nilai minimum maka ε ditempatkan di sel kosong yang memiliki ongkos terendah, dan ε ditempatkan di sel O_1D_2.

Banyak sel terisi sekarang 4 dan ini sama dengan $m + n - 1$, berarti program tidak mengalami kemerosotan. Selanjutnya digunakan MODI untuk menyelidiki keoptimalan program ini.

Sekarang harus ditentukan terlebih dahulu bilangan baris dan bilangan kolom.

Table 8.5b

	D_1	D_2	D_3	Bilangan Baris
O_1	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{1}$ ε	$\boxed{2}$	0
O_2	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{1}$ 25	0
Bilangan kolom	2	1	-2	

Sel kosong O_2 D_1 memiliki *implied cost* = $u_2 + v_1 = 3 + 2 = 5$, sedangkan $c_{21} = 3$ *Opportunity cost* = $5 - 3 = 2$. Program ini belum optimal program ini harus diperbaiki dengan mengikutsertakan sel O_2D_1 dalam program perbaikan ditampilkan pada Tabel 8.5c

TabeL 8.5c

	D_1	D_2	D_3	Total
O_1	- $\boxed{2}$ 20	$\boxed{1}$ ε	$\boxed{2}$	20
O_2	+ $\boxed{3}$	- $\boxed{4}$ 15	$\boxed{1}$ 25	40
Total	20	15	25	

Table 8.5d

	D_1	D_2	D_3	Total
O_1	$\boxed{2}$ 5	$\boxed{1}$ 15	$\boxed{2}$	20
O_2	$\boxed{3}$ 15	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$ 25	40
Total	20	15		

Loop tertutup pada table 8. 5c menunjukan bahwa paling banyak 15 unit dapat digeser ke sel O_2D_1. Maka diperlukan pengambilan 15 unit dari O_1D_1dan dari O_2D_2 dan penambahan 15 unit pada sel O_1D_2. Perlu diperhatikan 15 + ε = 15, sehingga sel O_1D_2 diberi alokasi 15 unit dalam pergeseran ini. Program perbaikan ditampilkan oleh table 8. 5d dan program ini tidak merosot karena jumlah sel terisi ialah 4. Langkah selanjutnya Anda proses sebagai persoalan transportasi yang sudah lazim.

Telah diamati, penempatan ε pada sebarang sel kosong, memungkinkan ditentukan suatu kumpulan bilangan baris dan bilangan kolom yang unik. Hal ini benar jika penyusunan program awal dilakukan dengan cara NWC. Tetapi jika program awal disusun dengan metode lain, tidak dapat ditempatkan ε di bilangan baris dan kolom yang unik masing-masing tunggal.

Kasus 2: Kemerosotan Selama Tahap Penyelesaian

Diberikan table 8.6 dan table 8.6a yang merupakan masalah transportasi dan program awalnya yang diperoleh dengan cara NWC.

Tabel 8.6

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Total
O_1	4	3	1	2	6	40
O_2	5	2	3	4	5	30
O_3	3	5	6	3	2	20
O_4	2	4	4	5	3	10
Total	30	30	15	20	5	

Table 8.6a

Program 1

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Total
O_1	4 30	3 10	1	2	6	40
O_2	5	2 20	3 10	4	5	30
O_3	3	5	6 5	3 15	2	20
O_4	2	4	4	5 5	3 5	10
Total	30	30	15	20	5	

Jumlah sel terisi ada 8, sedangkan m + n - =4 + 5 – 1 =8

Table 8.6b

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5		
O_1	4 30	3 - 10	1 + 4	2	6	40	0
O_2	5	2 + 20	3 - 10	4	5	30	-1
O_3	3 6	5 5	6 5	3 15	2	20	2
O_4	2 8	4 7	4 8	5 5	3 5	10	4
	30	30	15	20	5		
	4	3	4	1	-1		

Maka program awal tidak merosot, tetapi belum optimal. Sekarang perlu diselidiki keoptimalan program awal ini.

Dengan MODI kita selidiki opportunity cost sel kosong yang ada. Tentukan terlebih dahulu bilangan baris dan bilangan kolom. Ada beberapa sel kosong termasuk O_1D_3 yang memiliki opportunity cost positif. Marilah dicoba mengikutsertakan sel kosong O_1D_3 dalam program perbaikan. sesuai yang ditunjukan oleh loop tertutup,pergeseran ini memindahkan 10 unit ke sel O_1D_3 dalam program baru. Program yang dihasilkan ditunjukkan dengan table 8. 6c berikut ini. Program baru ini memiliki sel sebanyak 7, sedangkan m + n = 8. maka program ini mengalami kemerosotan. Kemerosotan timbul selama dalam tahap penyelesaikan maka sejumlah ε harus ditempatkan di salah satu dari sel-sel kosong O_1D_2, O_3D_2 , O_4D_2 , O_2D_1, O_2D_3, O_2D_4 atau O_2D_5. Mengingat masalah yang dihadapi ialah kasus mencari nilai minimum, kita harus menempatkan ε di sel dengan ongkos yang paling rendah. Terdapat ada kaitan antara sel O_1D_2 dan O_2D_3 maka ε kita tentukan di sel O_1D_2. Dengan penempatan ε di sel O_1D_2 ini diperoleh 8 sel terisi dan mulai dapat ditentukan bilangan baris dan bilangan kolom.

Tabel 8.6c

Program 2

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Total	Bilangan Baris
O_1	4 30 -	3 ε	1 10 +	2	6	40	0
O_2	5	2 30	3 10	4	5	30	-1
O_3	3	5 8	6 - 5	+ 3 15	2	20	2
O_4	2 +0 11	4 10	4 8	5 5 -	3 5	10	7
Total	30	30	15	20	5		
Bilangan kolom	4	3	1	-2	-4		

Sel kosong dengan *opportunity cost* tertinggi ialah sel O_4D_1 . dengan loop tertutup melalui O_4D_1 seperti yang dilukis pada table 8.6c menunjukkan bahwa sejumlah 5 unit dapat digeser dari sel O_4D_4 yang diisi kesal O_4D_1.

Table 8.6d

Program 3

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5		
O_1	- 4	ε 3	10 + 1	7 + 2	6	40	0
O_2	25 5	+ 2	3	6 4	5	30	-1
O_3	3	30 5	6	20 3	2	20	-4
O_4	+ 2	4	4	- ε 5	3	10	-2
total	5 30	30	15	20	5 5		
	4	3	1	7	5		

Program setelah perbaikan ditunjukan pada table 8. 6d. sel yang terisi ada 7 sedang m + n – 1 = 8. Program pada table 8.6d ini mengalami kemerosotan lagi. Diletakkan ε disel O_4D_4 sehingga jumlah sel ini ada 8 lagi.

Perhitungan bilangan baris dan bilangan kolom menunjukkan bahwa sel O_1D_4 memiliki opportunity cost tertinggi. Maka dilukis loop tertutup melalui sel O_1D_4. Ternyata hanya sejumlah ε unit barang dapat digeser dan program perbaikan ialah sebagai berikut.

Table 8.6e

Program 4

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	4 25 -	3 ε	1 15 +	2 + ε	6	0
O_2	5	2 + 30	3	4	5	-1
O_3	3 5	5	6	3 - 20	2 + 6	1
O_4	2 + 5	4	4	5	3 - 5	-2
	4	3	1	2	5	

Perhitungan *opportunity cost* menunjukkan sel kosong O_3D_5 harus diikutsertakan dalam program perbaikan sejumlah 5 unit harus digeser dan selO_3D_5 untuk mengisi sel O_3D_4. Pergeseran ini menghasilkan program 5.

Penyelesaian terhadap program 5 menunjukkan program tersebut belum optimal dan sel O_3D_1 harus diikutsertakan dalam program baru. *Loop* tertutup yang dilukis melewati sel O_3D_1 menunjukkan bahwa sejumlah 15 unit dapat digeser dari sel O_3D_4 untuk mengisi sel O_3D_1. Perbaikan program 5 menghasilkan program 6 yang tertera pada table 8.6 g. program 6 tidak merosot karena memiliki sel isi sejumlah 8.

Bilangan baris dan bilangan kolom untuk program 6 ini. Dari perhitungan *opportunity cost* setiap sel kosong dapat diambil kesimpulan program 6 adalah optimal. Ini ditandai dengan tidak adanya sel kosong yang memiliki *opportunity cost* yang positif.

Table 8.6f.

Program 5

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Bilangan baris
O_1	4 - 20	3 ε	1 15 +	2 + 5	6	0
O_2	5	2 30	3	4	5	-1
O_3	3 +5	5	6	3 15	2 5	1
O_4	2 10	4	4	5 ε	3	-2
Bilangan Kolom	4	3	1	2	1	

Table 8.6g.

Program 6

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	4 5	3	1 15	2 20	6	0
O_2	5	2 30	3	2	5	-1
O_3	3 15	5	6	3	2 5	-1
O_4	2 10	4	4	5	3	-2
	4	3	1	2	3	

Pilihan terhadap Solusi Optimal Masalah Transportasi

Penyelesaian optimal suatu masalah transportasi tidak selalu tunggal. Terdapat lebih dan satu penyelesaian optimal dapat ditentukan dengan menguji *opportubity cost*setiap sel kosong dalam program optimal. Jika terdapat sel kosong dengan opportunity cost sama dengan nol dalam program optimal, maka program optimal lain dengan biaya pengangkutan total yang sama seperti program optimal pertama selalu dapat disusun.

Program optimal kedua dapat diperoleh dengan mengikutsertakan sel kosong yang memiliki opportunity cost sama dengan nol.

Sebagai contoh perhatikanlah table 8.7 yang menunjukkan program optimal pertama.

Tabel 8.7

Program optimal 1

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	12 / 11	4 / +	9 / - 25	5 / 30	9 / 4	0
O_2	8 / 10	1 / - 20	6 / + 15	6 / 2	7 / 1	-3
O_3	1 / 30	12 / -6	4 / -1	7 / -5	7 / -6	-10
O_4	10 / 8	15 / 1	6 / 10	9 / 2	1 / 40	-3
	11	4	9	5	4	

Tidak ada sel kosong yang memiliki opportunity cost yang positif. Ini berarti benar program yang tertera pada table 8.7 adalah optimal. Ada sel kosong yang memiliki opportunity cost bernilai nol. Program optimal 1 memiliki ongkos pengangkutan total = 29 x 9 + 30 x 5 + 10 x 8 + 20 x 1 + 15 x 6 + 30 x 1 + 10 x 6 + 40 x 1 = $695.

Program disusun kembali dengan mengikutsertakan sel kosong O_1D_2. Dari loop yang dilukis terlihat sejumlah 20 unit harus dari sel O_2D_2 untuk mengisi sel O_1D_2. Setelah pergeseran ini diperoleh program optimal kedua.

Program optimal 2 memiliki biaya pengangkutan totalsejumlah 20(4) + 5(9) + 30(5) + 35(6) + 30(1) + 10(6) + 40(1) = $695. Dari perhitungan *opportunity cost* setiap sel kosong ternyata sel O_2D_2 memiliki *opportunity cost* nol maka masih dapat disusun program optimal dengan mengikutsertakan sel O_2D_2

Table 8.7a

Program optimal 2

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	11 $\boxed{12}$	20 $\boxed{4}$	5 $\boxed{9}$	30 $\boxed{5}$	4 $\boxed{9}$	0
O_2	10 $\boxed{8}$	1 $\boxed{1}$	35 $\boxed{6}$	2 $\boxed{6}$	1 $\boxed{7}$	-3
O_3	30 $\boxed{1}$	-6 $\boxed{12}$	-1 $\boxed{4}$	-5 $\boxed{7}$	-6 $\boxed{7}$	-10
O_4	8 $\boxed{10}$	1 $\boxed{15}$	10 $\boxed{6}$	2 $\boxed{9}$	40 $\boxed{1}$	-3
	11	4	9	5	-4	

Jika telah diperoleh dua program optimal maka program optimal berikutnya dapat diturunkan dengan rumus :

$$\boxed{\text{Program optimal} = dA + (I - d)B}$$

Dengan: A = matriks program optimal pertama

B = matriks program optimal kedua

D = sebarang pecahan lebih kecil dari 1

Table 8.7b

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	total
O_1	$\boxed{12}$	$\boxed{4}$ 0+12=12	$\boxed{9}$ 10+3=13	$\boxed{5}$ 12+8=30	$\boxed{9}$	55
O_2	$\boxed{8}$ 4+6=10	$\boxed{1}$ 8+10=8	$\boxed{6}$ 6+21=27	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	45
O_3	$\boxed{1}$	$\boxed{12}$	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{7}$	30
O_4	$\boxed{10}$	$\boxed{15}$	$\boxed{6}$ 6+4=10	$\boxed{9}$	$\boxed{1}$ 16+24=40	50
	40	20	50	30	40	

Marilah kita gunakan rumus tersebut di atas dengan mengambil d $= \frac{2}{5}$

Maka program optimal baru diberikan dengan:

$$\frac{2}{5}A + \frac{3}{5}B$$

Maka setiap alokasi matriks A dikalikan dengan $\frac{2}{5}$, dan di matriks B

Kita kalikan dengan $\frac{3}{5}$, kemudian dijumlahkan elemen yang berkaitan dengan data matriks. Diperoleh table 8.7b.

Program optimal yang diturunkan diperlihatkan pada table 8.7b dengan ongkos pengangkutan total 12(4) + 13(9) + 30(5) + 10(8) + 8(1) + 27(6) + 30(1) + 10(6) + 40(1) = $695.

Dalam program optimal ini terlihat ada 9 sel terisi, tetapi persyaratan "RIM" masih tetap dipenuhi. Ini berarti program optimal ini merupakan penyelesaian yang *feasible* sebarang pecahan lebih kecil dari 1 maka dapat diperoleh tak terhingga banyak solusi optimal.

LATIHAN

1) Anda ditugasi meyelesaikan masalah transportasi jika $\sum b_i < \sum d_j$ apa yang anda lakukan?
2) Anda ditugasi menyelesaikan masalah transportasi jika $\sum b_i < \sum d_i$ apa yang anda lakukan?
3) $Apakah\ yang\ diartikan\ dengan\ dummy\ tujuan$?
4) Apakah yang diartikan dengan *dummy* asal?
5) Berapakah ongkos pengangkutan dari *dummy* asal ke *dummytujuan* dan dari maupun ke *dummy* tujuan?
6) Berapakah kasus kemerosotan dalam program transportasi Dapat anda jumpai?
7) Bila manakah suatu program transportasi disebut merosot?
8) Bagaimanakah anda mengatasi masalah kemerosotan dalam program transportasi!
9) Apakah penyelesaian optimal dalam masalah transportasi tunggal? Jelaskan!
10) Jika anda telah memperoleh program optimal 1, bagaimana anda peroleh program optimal?

RANGKUMAN

1) Secara lebih khusus anda akan menghayati penyelesaian persoalan transportasi jika tidak seimbang.
2) Anda akan mampu menyelesaikan persoalan transportasi jika kapasitas total kurang dari banyak tujuan ($\sum b_i < \sum d_j$).
3) Anda akan mampumenyelesaikan persoalan transportasi jika kapasitas total melebihi banyak tujuan ($\sum b_i > \sum d_j$).
4) Anda akan memahami arti "DUMMY" asal sekaligus menghayati makan dan kegunannya.

5) Anda akan memahami arti "DUMMY" tujuan sekaligus menghayati makna dan kegunannya.
6) secara lebih khusus anda memahami apa arti kemerosotan dalam program transportasi.
7) Anda akan mampu menangani suatu program yang mengalami kemerosotan.
8) Anda akan memahami suatu program optimal tidak tunggal.
9) Anda akan mampu menentukan program optimal kedua jika anda memiliki program optimal kesatu.
10) Anda telah mengenal rumus

$$\text{Program optimal} = dA + (1 - d) B$$

Yang digunakan untuk menentukan program optimal berikutnya.

UJI KOMPETENSI

Diberikan masalah transportasi yang tidak seimbang dengan data sebagai berikut.

	Proyek A	Proyek B	Proyek C	Kapasitas 0
Pabrik W	4	8	8	56
Pabrik X	16	24	16	82
Pabrik Y	4	16	24	77

	Proyek A	Proyek B	Proyek C	Kapasitas 0
Permintaan	82	102	61	215 / 245

1) Persoalan transportasi ini harus ditangani dengan ….
   A. Langsung menggunakan NWC
   B. Langsung menggunakan MODI
   C. Menambah pabrik *dummy*
   D. Menambah tujuan *dummy*

1) Setelah diusahakan agar memenuhi persyaratan RIM, maka dilakukan langkah pertama dengan menggunakan NWC. Program 1 yang diperoleh melibatkan biaya pengangkutan sebesar ….
   A. $3464
   B. $3425
   C. $3405
   D. $3395

2) Setelah program I diselidiki maka *opportunity cost* terbesar dimiliki oleh ….
   A. Sel WC
   B. Sel WB
   C. Sel YA

D. Sel XC

3) Setelah program I diperbaiki, diperoleh program II yang masih juga belum optimal. Perbaikan program II harus mengikutsertakan ….
   A. Sel WB
   B. Sel D_m B
   C. Sel D_m C
   D. Sel XC

4) Perbaikan program II menghasilkan program III dengan alokasi ….
   A. WA = 26, XA = 56, XC = 26, YB = 77, D_mB = 25, D_mC = 5
   B. WA = 56, XA = 26, XC = 56, YB = 77, D_mB = 25, D_mC = 5
   C. WA = 26, XA = 56, XC = 46, YB = 77, D_mB = 25, D_mC = 5
   D. WA = 56, XB = 56, XC = 5, D_mA = 26, D_mB =25, D_mC = 5

5) Setelah diselidiki ternyata program III belum optimal dan *opportunity cost* tertinggi dimiliki oleh ….
   A. Sel D_mA
   B. Sel WC
   C. Sel XB
   D. Sel YA

6) Perbaikan program III menghasilkan program IV dengan alokasi ….
   A. WA = 56, XA = 21, XC = 61, YA = 5, YB = 72, D_mB = 30
   B. WA = 56, XA = 26, XC = 61, YB = 72, YC = 5, D_mB = 30
   C. WA = 56, XA = 26, XB = 56, YB = 46, YC = 31, D_mC = 30
   D. WA = 56, XA = 26, XB = 25, XC = 31, YB = 77, D_mC = 30

7) Program IV ternyata belum optimal dan *opportunity cost* tertinggi dimiliki oleh ….
   A. Sel XB
   B. Sel YC
   C. Sel WB
   D. Sel WC

8) Perbekikan program IV menghasilkan program V dengan alokasi ….
   A. WB = 56, XA = 21, XC = 61, YA = 5, YB = 72, D_mB = 30
   B. WB = 56, XA = 26, XC = 56, YB = 77, XB = 30, D_mC = 5
   C. WB = 56, XA = 26, XB = 25, XC = 31, YB = 77, D_mC = 30
   D. WB = 56, XA = 21, XC = 61, YA = 61, YB = 16, D_mB = 30

9) Program V ternyata telah optimal dengan biaya pengangkutan total yang minimum sebesar ….
   A. $2475
   B. $2490
   C. $2504
   D. $2554

Diberikan masalah transportasi dengan data sebagai berikut. Dengan metode NWC disusun suatu program awal.

Ke / dari	A	B	C	Kapasitas
W	4	8	8	55
X	16	24	16	25
Y	8	16	24	35
Permintaan	35	45	35	

10) Program awal yang diperoleh ternyata ….
   A. Feasible
   B. Optimal
   C. Merosot
   D. Tidak dapat diperbaiki

11) Program awal diperbaiki dengan memberikan alokasi ε pada ….
    A. Sel XC
    B. Sel WC
    C. Sel XA
    D. Sel YA

12) *Opportunity cost* tertinggi dimiliki oleh sel kosong ….
    A. WC
    B. YA
    C. YB
    D. XA

13) Loop tertutup yang dilukis sel kosong tersebut menunjukkan pergeseran akan memindahkan ….
    A. ε unit
    B. 20 unit
    C. 25 unit
    D. 35 unit

14) Setelah pergeseran ini diperoleh program dengan alokasi ….
    A. WA = 20, WB = 35, XC = 25, YA = 15, YB = 10, YC = 10
    B. WA = 25, WB = 25, XA = 10, XB = 15, YC = 35, YC = 10

C. WA = 20, WC = 35, XB = 25, YA = 15, YB = 20, YC = 10

D. WA = 10, WB = 45, XA = 25, XC =ε, YC = 35, YC = 10

Diberikan masalah transportasi dengan data sebagai berikut.

	A	B	C	Kapasitas
W	$\boxed{4}$ 45	$\boxed{8}$ 45	$\boxed{24}$	90
X	$\boxed{8}$	30 $\boxed{4}$	30 $\boxed{8}$	60
Y	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	30 $\boxed{16}$	30
	45	75	60	

Dengan metode NWC disusun suatu program awal, sebagai ditunjukkan dalam table di atas

15) Program awal (pertama) ini ….

A. Merosot

B. Optimal

C. Feasible

D. Tidak dapat diperbaiki

16) Program awal diperbaiki dengan mengikutsertakan sel kosong ….

A. WC

B. XA

C. YA

D. YB

17) Program pertama diperbaiki dengan menggeser sejumlah ….
    A. 20
    B. 30
    C. 40
    D. 50

18) Program kedua yang telah diperbaiki ternyata merosot. Kemerosotan diatasi dengan memberikan alokasi ε pada sel ….
    A. WC
    B. XA
    C. XC
    D. XB

19) Penyelesaian optimal suatu masalah transportasi tidak tunggal. Jika telah diperoleh dua program optimal maka program lainnya dapat diturunkan dengan rumus (A dan B adalah matriks program optimal 1 dan 2) ….
    A. dA + (1 – d) B, d sebarang konstanta
    B. (A – dB) – dA, d pecahan
    C. dA + (1 – d)B, d lebih kecil dari 1 dan positif
    D. (1 – d) A + B, d lebih kecil dari 1 dan positif

DAFTAR PUSTAKA

Anonim, (1979). *Matematika 9 untuk SMA*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan kebudayaan RI.

Bazaraa S Mokhtar. (1977). *Linear Programming and Network Flows*. York-Toronto-london-Sidney: John Wiley & Sons.

Bazaraa M. S Jarvis J. J. (1977). *Linear Programming and Network Flows*, New York – London – Santa Barbara – Sydney – Toronto: John Wiley & Sons.

Bunarso T. (1976). *Program Linear (diktat Terbatas*), Bandung: Jurusan Matematika, IKIP Bandung.

Bunday D Brian. (1948). *Basic Linear Programming*. Baltimore: Arnold.

Frank S Budnick. *Applied Mathematics for Business Economics and Social Sciences.*

Howard Anton, (Pantur Silaban). (1984). *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta Erlangga.

Kakisina Stephen & Bambang Handoyo. (1986). *Programasi Linear*. Semarang: Satya Wancana.

Keddy & Bittinger. (1976) *Algebra and Trigonometry: A Functions Approach. Addition Wesley Publising Company.*

Kuznets, S. (1966). Modern Economic Growth. New Haven, Yale University Press.

Martin E. Wainright, Jr. (1969). *Programmed Learning Aid For Linear Programming.* Homewood, Illinois: Richard D Irwin.

Mizrahi and Sullivan. (1976). *Mathematics for Business and Social Sciences: An Applied Apporoach.* New York-London-Sydney-Toronto: John Wiley & Sons.

N. Paul Lomba. *Linear Programming*. McGraw Hill.

Nasendi B & A. Affendi. (1985). *Program Linear*. Jakarta: Gramedia.

Richard I. Levin A Kirik Patrick/David S Rubin. *Quantitative Approaches to Management*.

Rostow, WW. (1960). The Stages of Economic Growth. London, Cambridge University Press.

Rostow, WW. (1956). The Take of Into Self Sustained Growth. Economic Journal.

Seymour Lipschutz. *Finite Mathematics*. McGraw Hill.

Sadono Sukirno. (1078). Ekonomi Pembangunan. Medan: Borta Gorat.

Siagian P. (1987). *Penelitian Operasional*. Jakarta: UI-PRESS.

Supranto J. (1984). *Pengantar Matriks*. Jakarta: LPFE-UI.

Supranto J. (1984). *Linear Programming*. Jakarta: Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

Sutanta B. (1994). *Program Linear*. Yokyakarta: DepDikBud DirJen PT proyek pendidikan bagi guru.

Todaro, M. P. (1978). Economic Development in the Third World. New York: Longman, Inc.

Wainright Martin E. (1969). *Linear Programming*. USA: Richard D Irvin.

Walsh G. R. (1985). *Linear Programming*. New York – Brisbane – Toronto Singapore: John Willey & Sons.

Walsh G.R. (1985). *An Introduction Linear Programming*. Chichester, new York- Brisbane – Toronto – Singapore: John Wiley & Sons.